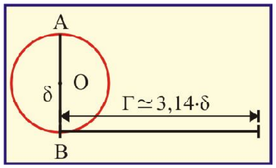
3.3 - 3.4 - 3.5 - 3.6 Μήκος κύκλου - Εμβαδόν κυκλικού δίσκου - Μήκος τόξου - Εμβαδόν κυκλικού τομέα

Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε μήκος ή περίμετρος ενός κύκλου; Τι ποσά είναι το μήκος των κύκλων και η διάμετρός τους;

Απάντηση



Μήκος ή περίμετρος κύκλου ονομάζουμε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που προκύπτει αν "κόψουμε" υποθετικά τον κύκλο σε ένα σημείο του και στη συνέχεια τον "τεντώσουμε".
Το μήκος των κύκλων και η διάμετρός τους είναι ποσά ανάλογα. Δηλαδή **για όλους τους κύκλους** ο λόγος - το πηλίκο $\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}}$ ή με σύμβολα $\frac{\Gamma}{\delta}$ είναι ο ίδιος και συμβολίζεται με το γράμμα **π**, δηλαδή ισχύει:

$$\boxed{\frac{\Gamma}{\delta}=\pi} \quad \text{ή} \quad \boxed{\Gamma=\pi\cdot\delta=2\pi\rho\,,}$$

όπου δ η διάμετρος και ρ η ακτίνα του κύκλου.
Ο αριθμός **π** είναι άρρητος, δηλαδή απειροψήφιος δεκαδικός μη περιοδικός αριθμός. Στους υπολογισμούς μας θα χρησιμοποιούμε την ρητή προσεγγιστική τιμή π = 3,14.

Ερώτηση 2

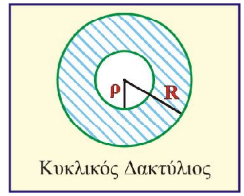
Με τι ισούται το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου; Τι ονομάζουμε κυκλικό δακτύλιο;

Απάντηση

Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου (ή εμβαδόν κύκλου) ακτίνας ρ ισούται με:

$$E=\pi\cdot\rho^2 \quad \text{ή} \quad E=\pi\cdot\left(\frac{\delta}{2}\right)^2=\frac{\pi\cdot\delta^2}{4}\,,$$

όπου δ = 2ρ

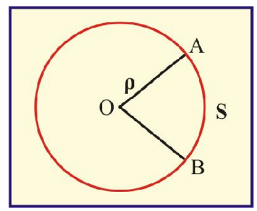


Κυκλικό δακτύλιο ονομάζουμε το σχήμα που περικλείεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων διαφορετικής ακτίνας, (O,R) και (O,ρ) με R > ρ.

Ερώτηση 3

Ποια σχέση μας δίνει το μήκος S ενός τόξου $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλο (O,ρ); Τι είναι το ακτίνιο ή rad;

Απάντηση



Αν η επίκεντρη γωνία εκφράζεται σε μ^o μοίρες τότε το μήκος του τόξου S θα είναι:

$$S=\frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu^o}{180^o}$$

Αν η επίκεντρη γωνία εκφράζεται σε α ακτίνια το μήκος S θα είναι:

$$S=\alpha\cdot\rho$$

Ακτίνιο ή rad σε κύκλο (O,ρ), λέγεται το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ και χρησιμοποιείται για την μέτρηση των τόξων. Δηλαδή τόξο 1 rad έχει μήκος ρ
Άρα, αφού το μήκος κύκλου είναι Γ = 2πρ, σε ακτίνια ο κύκλος είναι 2π rad, ενώ το ημικύκλιο S είναι π rad.

Ερώτηση 4

Ποια είναι η σχέση μεταξύ μοιρών και ακτινίων;

Απάντηση

Τα 2π rad αντιστοιχούν σε 360°.

Το 1 rad θα αντιστοιχεί σε: $\frac{360^\circ}{2\pi}$ ή $\frac{180^\circ}{\pi}$ (μοίρες)
Συνεπώς τα α rad θα αντιστοιχούν σε:

$$\mu^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} \quad \text{ή} \quad \frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

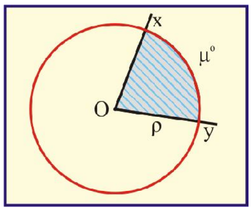
Το $1\text{rad} \simeq 57^\circ\, 19'$.

Ερώτηση 5

Τι ονομάζουμε κυκλικό τομέα; Ποιες σχέσεις μας δίνουν το εμβαδόν του;

Απάντηση

Κυκλικός τομέας γωνίας $\hat{\varphi}$ σε κύκλο (Ο,ρ) λέγεται το κοινό μέρος του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου και της επίκεντρης γωνίας $\hat{\varphi}$ στον κύκλο. (Στο σχήμα το γραμμοσκιασμένο μέρος). Αν η επίκεντρη γωνία εκφράζεται σε μ°:



$$E = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$$

Αν η επίκεντρη γωνία εκφράζεται σε α ακτίνια: $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \rho^2$

Επίσης ισχύει:

$$E = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \rho \cdot \mu}{2 \cdot 180^\circ} = \frac{1}{2}\frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu}{180^\circ} \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho\,,$$

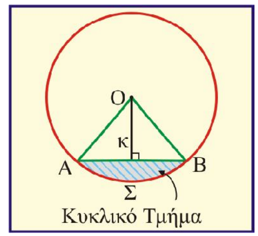
όπου S το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Άρα: $E = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho$

Ερώτηση 6

Τι λέγεται κυκλικό τμήμα και πως βρίσκουμε το εμβαδόν του;

Απάντηση

Κυκλικό τμήμα είναι το μέρος ενός κυκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο και την αντίστοιχη χορδή του. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΣΒ είναι ίσο με τη διαφορά του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΒ από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\widehat{OAB}$, δηλαδή:



$$E_\Sigma = E_{\widehat{OAB}} - E_{AB\Gamma} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} - \frac{1}{2} \cdot AB \cdot OK$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

α. Να βρεθεί το μήκος κύκλου ακτίνας ρ = 6cm.
β. Να βρεθεί η ακτίνα κύκλου με μήκος Γ = 43,96cm.
γ. Να βρεθεί το εμβαδόν κυκλικού δίσκου διαμέτρου δ = 2m.

Λύση

α. Είναι: $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6 = 37{,}68\,\text{cm}$

β. Είναι: $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho$ ή $\rho = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi} = \frac{43{,}96}{2 \cdot 3{,}14} = 7{,}03\,\text{cm}$

γ. Το εμβαδόν είναι: $E = \pi \cdot \rho^2 = \pi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 = \frac{\pi \cdot \delta^2}{4}$ ή

$$E = \frac{3{,}14 \cdot 2^2}{4} = 3{,}14\,\text{m}^2$$

2 Να βρείτε το μέτρο ένος τόξου:
i. Σε ακτίνια, αν το μέτρο του σε μοίρες είναι 150°.
ii. Σε μοίρες, αν το μέτρο του σε ακτίνια είναι $\frac{\pi}{3}$ rad.

Λύση

i. Είναι: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$ ή $\alpha = \frac{\mu^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{150^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$ ή $\alpha = \frac{5\pi}{6}$rad.

ii. Είναι: $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu^\circ}{180^\circ}$ ή $\mu^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} = \frac{\frac{\pi}{3} \cdot 180^\circ}{\pi}$ ή $\mu^\circ = 60^\circ$

3 Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν διάμετρο 80 cm και έκαναν 6.000 στροφές. Να βρείτε πόση απόσταση διήνησε το ποδήλατο.

Λύση

Όταν οι τροχοί του ποδηλάτου κάνουν μια πλήρη περιστροφή, το ποδήλατο διανύει απόσταση ίση με το μήκος τους. Άρα για μια πλήρη περιστροφή έχουμε απόσταση:

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho = \delta \cdot \pi = 80 \cdot 3{,}14 = 251{,}2\text{cm} = 2{,}512\text{m}$$

Άρα για 6.000 στροφές των τροχών το ποδήλατο διήνυσε απόσταση ίση με:

$$S = 6.000 \cdot 2{,}512 = 15072\text{m} = 15{,}072\text{Km}$$

4 Οι περίμετροι δύο κύκλων διαφέρουν κατά 25,12 cm. Να βρείτε τη διαφορά:
i. Των ακτίνων τους ii. Των διαμέτρων τους

Λύση

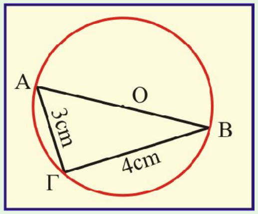
Αν ονομάσουμε ρ_1, ρ_2 τις ακτίνες με $\rho_1 > \rho_2$, δ_1, δ_2 τις διαμέτρους, Γ_1, Γ_2 τις περιμέτρους έχουμε:

i. $\Gamma_1 - \Gamma_2 = 25{,}12$ ή $2\pi\rho_1 - 2\pi\rho_2 = 25{,}12$ ή

$2\pi(\rho_1 - \rho_2) = 25{,}12$ ή $\rho_1 - \rho_2 = \frac{25{,}12}{2 \cdot 3{,}14}$ ή $\rho_1 - \rho_2 = 4\text{cm}$

ii. $\delta_1 - \delta_2 = 2\rho_1 - 2\rho_2 = 2(\rho_1 - \rho_2) = 2 \cdot 4 = 8\text{cm}$

5



Στο παραπάνω σχήμα να υπολογίσετε την ακτίνα, την διάμετρο, το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ (βαίνει σε ημικύκλιο)

Άρα: $AB^2 = A\Gamma^2 + \Gamma B^2$ ή $AB^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ ή

$AB = \sqrt{25}$ ή $AB = 5\text{cm}$.

Άρα: $\rho = \frac{5}{2} = 2{,}5\text{cm}$, $AB = \delta = 5\text{cm}$

Το μήκος του κύκλου θα είναι:

$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 = 15{,}7 \text{ cm}$$

Το εμβαδόν είναι: $E = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 2{,}5^2 = 19{,}625\text{cm}^2$

6 Τόξο 45° σε κύκλο (Ο,ρ) έχει μήκος 2cm. Να βρεθεί η ακτίνα του κύκλου.

Λύση

Το μήκος S του τόξου είναι:

$S = \dfrac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^{o}}{180^{o}}$ ή $\pi \cdot \rho \cdot \mu^{o} = 180^{o} \cdot S$ ή $\rho = \dfrac{180^{o} \cdot S}{\pi \cdot \mu^{o}} = \dfrac{180^{o} \cdot 2}{3{,}14 \cdot 45^{o}}$

ή $\rho \simeq 2{,}55$ cm

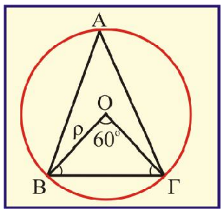
7 Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ} = 30^{o}$ και η χορδή ΒΓ = 6cm. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κύκλου.

Λύση

Για την επίκεντρη γωνία $\widehat{ΒΟΓ}$ ισχύει: $\widehat{ΒΟΓ} = 2 \cdot \widehat{ΒΑΓ} = 2 \cdot 30^{o} = 60^{o}$

Άρα το τρίγωνο ΒΟΓ θα είναι ισόπλευρο διότι:

ΟΒ = ΟΓ = ρ, οπότε $\hat{Β} = \hat{Γ}$.



Αλλά $\hat{Ο} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 180^{o}$ ή $\hat{Ο} + 2\hat{Β} = 180^{o}$

ή $2\hat{Β} = 180^{o} - 60^{o} = 120^{o}$ ή $\hat{Β} = \hat{Γ} = 60^{o}$

Συνεπώς $\rho = 6cm$. Το εμβαδόν του κύκλου θα είναι:

$$Ε = \pi \cdot \rho^{2} = 3{,}14 \cdot 6^{2} = 113{,}04cm^{2}$$

8 Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΟΒΓ με πλευρά 9cm να γράψετε κύκλο με κέντρο την κορυφή Ο και ακτίνα το ύψος του ΟΜ. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

Λύση

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΜΒΟ έχουμε: $ΟΒ^{2} = ΟΜ^{2} + ΒΜ^{2}$ ή

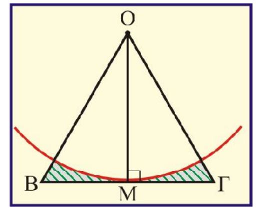
$ΟΜ^{2} = ΟΒ^{2} - ΒΜ^{2}$ ή $ΟΜ^{2} = 9^{2} - 4{,}5^{2} = 81 - 20{,}25 = 60{,}75$

ή $ΟΜ = \sqrt{60{,}75}$ ή $ΟΜ = 7{,}79cm$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι ΟΒΓ είναι:

$$Ε_{1} = \frac{1}{2} ΒΓ \cdot ΟΜ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 7{,}79 = 35{,}055cm^{2}$$

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα που είναι εντός του τριγώνου x είναι:



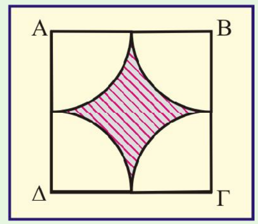
$Ε_{2} = \dfrac{\pi \cdot \rho^{2} \cdot \mu^{o}}{360^{o}} = \dfrac{3{,}14 \cdot 7{,}79^{2} \cdot 60^{o}}{360^{o}}$ ή

$Ε_{2} = 31{,}75cm^{2}$.

Άρα το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους είναι:

$$Ε = Ε_{1} - Ε_{2} = 35{,}055 - 31{,}75 = 3{,}305cm^{2}$$

9 Να γράψετε τετράγωνο με πλευρά 26cm και με κέντρα τις κορυφές του και ακτίνα 13cm να γράψετε τεταρτοκύκλια μέσα στο τετράγωνο. Να βρεθεί το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου "σταυρού".



Λύση

Το εμβαδόν των 4 τεταρτοκυκλίων ισούται με το εμβαδόν ενός κύκλου με ακτίνα 13cm, δηλαδή είναι:

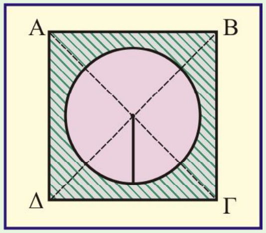
$$Ε_{1} = \pi \cdot \rho^{2} = 3{,}14 \cdot 13^{2} = 530{,}66cm^{2}$$

Το εμβαδόν του τετραγώνου είναι: $Ε_{2} = ΑΒ^{2} = 26^{2}$ ή

$Ε_{2} = 676cm^{2}$

Άρα το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου "σταυρού" θα είναι: $Ε = Ε_{1} - Ε_{2} = 676 - 530{,}66$ ή $Ε = 145{,}34cm^{2}$

10



Μέσα σε ένα χωράφι με σχήμα τετραγώνου, υπάρχει ένας αυτόματος περιστρεφόμενος μηχανισμός ποτίσματος στο κέντρο του. Ο μηχανισμός έχει τη δυνατότητα να ποτίζει σε κυκλική περιοχή, ακτίνας 13,6m. Το χωράφι έχει πλευρά $20\sqrt{3}\,m$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωραφιού που δεν ποτίζεται.

Λύση

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι:

$E_1 = AB^2 = \left(20\sqrt{3}\,m\right)^2 = 1200\,m^2$

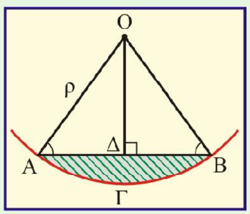
Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο,ρ) είναι:

$E_2 = \pi \cdot \rho^2 = 3{,}14 \cdot 13{,}6^2 = 580{,}77\,m^2$

Άρα το εμβαδόν του χωραφιού που δεν ποτίζεται είναι:

$E = E_1 - E_2 = 1200 - 580{,}77 = 619{,}23\,m^2$

11



Στο παραπάνω σχήμα έχουμε ρ = 12cm και $\hat{A} = 70^\circ$. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΒΟ είναι ισοσκελές άρα: $\hat{A} = \hat{B} = 70^\circ$, όποτε

$$\hat{O} = 180^\circ - (70^\circ + 70^\circ) = 40^\circ.$$

Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΔ ισχύει: $\eta\mu A = \frac{O\Delta}{OA}$ ή

$O\Delta = OA \cdot \eta\mu A = 12 \cdot 0{,}94$ ή $O\Delta = 11{,}28\,cm$

Όμοια $\sigma\upsilon\nu A = \frac{A\Delta}{OA}$ ή $A\Delta = OA \cdot \sigma\upsilon\nu A = 12 \cdot 0{,}342$ ή

$A\Delta = 4{,}104\,cm$

Οπότε $AB = 2 \cdot A\Delta$ ή $AB = 8{,}208\,cm$.

Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΟΑΓΒ θα είναι:

$E_1 = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ} = \frac{3{,}14 \cdot 12^2 \cdot 40^\circ}{360^\circ}$ ή $E_1 = 50{,}24\,cm^2$

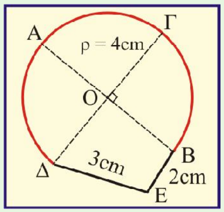
Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ θα είναι:

$E_2 = \frac{1}{2} AB \cdot O\Delta = \frac{1}{2} 8{,}208 \cdot 11{,}28 = 46{,}29\,cm^2$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$E = E_1 - E_2 = 50{,}24 - 46{,}29 = 3{,}94\,cm^2$

12



Να υπολογίσετε την περίμετρο του παραπάνου σχήματος.

Λύση

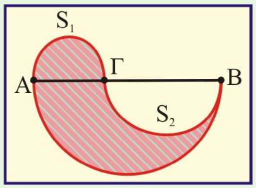
Για να βρούμε την περίμετρο Τ του σχήματος πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα των μηκών των τόξων $\overset{\frown}{B\Gamma}$, $\overset{\frown}{\Gamma A}$,

$\overset{\frown}{ΑΔ}$ και των τμημάτων ΔΕ και ΕΒ.
Καθένα από τα παραπάνω τόξα είναι 90°, άρα έχει μήκος :

$$S=\frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu^{o}}{180^{o}}=\frac{3{,}14\cdot4\cdot90^{o}}{180^{o}}=6{,}28\,cm$$

Άρα: $T=3\cdot6{,}28+3+2=23{,}84\,cm$

13



Στο παραπάνω σχήμα υπάρχουν 3 ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ, ΓΒ, ΒΑ και είναι ΑΒ = 12cm.

Επίσης τα τμήματα ΑΓ και ΓΒ έχουν λόγο $\frac{1}{3}$.

i. Να βρείτε το άθροισμα των τόξων $S_{\overset{\frown}{ΑΓ}}$, $S_{\overset{\frown}{ΒΓ}}$, $S_{\overset{\frown}{ΑΒ}}$.

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.

Λύση

i. Ισχύει: $\frac{ΑΓ}{ΓΒ}=\frac{1}{3}$ ή $ΓΒ=3ΑΓ$. Αλλά $ΑΓ+ΓΒ=ΑΒ$ ή

$ΑΓ+3ΑΓ=ΑΒ$ ή $4ΑΓ=ΑΒ$ ή $ΑΓ=\frac{12}{4}=3\,cm$

Οπότε $ΒΓ=ΑΒ-ΑΓ=12-3=9\,cm$

Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΑΓ}$ είναι:

$$S_{\overset{\frown}{ΑΓ}}=\frac{\pi\cdot\rho\cdot\mu^{o}}{180^{o}}=\frac{\pi\cdot\frac{ΑΓ}{2}\cdot180^{o}}{180^{o}}=\pi\cdot\frac{ΑΓ}{2}=3{,}14\cdot\frac{3}{2}=4{,}71\,m$$

Ομοίως $$S_{\overset{\frown}{ΒΓ}}=\frac{\pi\cdot\frac{ΓΒ}{2}\cdot180^{o}}{180^{o}}=\pi\cdot\frac{ΓΒ}{2}=3{,}14\cdot\frac{9}{2}=14{,}13\,cm$$

Είναι: $$S_{\overset{\frown}{ΑΒ}}=\frac{\pi\cdot\frac{ΑΒ}{2}\cdot180^{o}}{180^{o}}=\pi\cdot\frac{ΑΒ}{2}=3{,}14\cdot\frac{12}{2}=18{,}84\,cm$$

Άρα: $S_{\overset{\frown}{ΑΓ}}+S_{\overset{\frown}{ΒΓ}}+S_{\overset{\frown}{ΑΒ}}=37{,}68\,cm$

ii. Για να βρούμε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος θα πρέπει από το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το τμήμα ΑΒ να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο ΒΓ και μετά να προσθέσουμε το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το τμήμα ΑΓ.

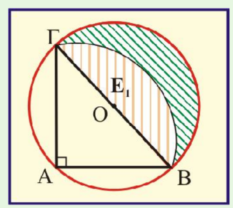
$$E_{ΑΒ}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^{2}\cdot180^{o}}{360^{o}}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΑΒ}{2}\right)^{2}}{2}=\frac{3{,}14\cdot\left(\frac{12}{2}\right)^{2}}{2}=56{,}52\,cm^{2}$$

$$E_{ΒΓ}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^{2}\cdot180^{o}}{360^{o}}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΒΓ}{2}\right)^{2}}{2}=\frac{3{,}14\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^{2}}{2}=31{,}79\,cm^{2}$$

$$E_{ΑΓ}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^{2}\cdot180^{o}}{360^{o}}=\frac{\pi\cdot\left(\frac{ΑΓ}{2}\right)^{2}}{2}=\frac{3{,}14\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2}}{2}=3{,}53\,cm^{2}$$

Άρα: $E=E_{ΑΒ}+E_{ΑΓ}-E_{ΒΓ}=28{,}26\,cm^{2}$

14



Δίνεται το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{Α}=90^{o},ΑΒ=ΑΓ=9\,cm)$

Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα 9cm και τον κύκλο με διάμετρο την πλευρά ΒΓ. Να συγκρίνετε τα εμβαδά του γραμμοσκιασμένου τμήματος (το τμήμα αυτό λέγεται μηνίσκος) και το τρίγωνο ΑΒΓ.

Λύση

Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$E = \frac{1}{2}\cdot AB\cdot A\Gamma = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot 9 = 40{,}5\text{cm}^2$$

Επίσης από το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$B\Gamma^2 = A\Gamma^2 + AB^2 = 81+81=162$$

Άρα $B\Gamma = \sqrt{162}$ ή $B\Gamma = 12{,}73\text{cm}$.

Το εμβαδόν του μηνίσκου θα βρεθεί αν από το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο το ΒΓ αφαιρέσουμε το τμήμα του εμβαδού E_1. Το εμβαδόν E_1 θα το βρούμε αν από το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου με κέντρο το Α και ακτίνα το ΑΒ αφαιρέσουμε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

$$E_{B\Gamma} = \frac{\pi\cdot\rho^2}{2} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{12{,}73}{2}\right)^2}{2} = \frac{127{,}21}{2} = 63{,}605\,\text{cm}^2$$

Το εμβαδόν του τεταρτοκυκλίου είναι:

$$E_{\tau\varepsilon\tau.} = \frac{\pi\cdot(AB)^2\cdot 90^\circ}{360^\circ} = \frac{3{,}14\cdot 9^2\cdot 90^\circ}{360^\circ} = 63{,}585\text{cm}^2$$

Άρα $E_1 = E_{\tau\varepsilon\tau.} - E_{\hat{AB\Gamma}} = 23{,}085\,\text{cm}^2$

Οπότε το εμβαδόν του μηνίσκου θα είναι:

$E_{\mu\eta\nu.} = E_{B\Gamma} - E_1 = 63{,}605 - 23{,}085 = 40{,}5$

Παρατηρούμε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.*

Μήκος κύκλου		314m		
Διάμετρος			12m	
Ακτίνα	16m			7m

2 *Το μήκος ενός ημικυκλίου ακτίνας ρ είναι:*

Α. 4πρ **Β.** 2πρ **Γ.** $\frac{\pi\cdot\rho}{2}$ **Δ.** $\pi\cdot\rho$

3 *Με μια κλωστή μήκους 18cm κατασκευάζουμε έναν κύκλο ακτίνας:*

Α. $\frac{18}{\pi}$cm Β. $\frac{9}{\pi}$cm Γ. $\frac{36}{\pi}$cm Δ. $\frac{8}{\pi}$cm

4 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Μέτρο τόξου σε μοίρες	180°		360°	
Μέτρο τόξου σε ακτίνα		$\pi/2$		$\pi/4$

5 Να αντιστοιχίσετε τα μήκη και τα τόξα μ° της στήλης Α με τις ακτίνες της στήλης Β.

Στήλη Α			Στήλη Β
3π cm, $\mu^\circ = 180^\circ$	•	•	2cm
4π cm, $\mu^\circ = 360^\circ$	•	•	18cm
5π cm, $\mu^\circ = 90^\circ$	•	•	3cm
6π cm, $\mu^\circ = 60^\circ$	•	•	10cm

6 *Να συμπληρώσετε τον πίνακα:*

Εμβαδόν κυκλικκού δίσκου			$49\pi cm^2$	$81\pi m^2$
Διάμετρος κύκλου	10cm	6cm		

7 *Ο λόγος των εμβαδών των κύκλων (0,3ρ) προς (0,ρ) είναι*

Α. 3 Β. 9 Γ. 9ρ Δ. 3ρ

8 *Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).*

α. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου τότε διπλασιάζεται και το μήκος του κύκλου ☐

β. Αν τριπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου τότε τριπλασιάζεται και το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου ☐

γ. Αν διπλασιάσουμε το μέτρο ενός τόξου του κύκλου (Ο,ρ) διπλασιάζεται και το μήκος αυτού στον ίδιο κύκλου ☐

δ. Τα εμβαδά δύο κυκλικών τομέων του αντιστοιχούν σε ίσες χορδές ενός κύκλου είναι ίσα ☐

9 Να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα

Ακτίνα κύκλου	5				
Διάμετρος κύκλου		20			14
Γωνία κυκλικού τομέα	30°		45°	60°	
Μήκος τόξου		5π	6π		
Εμβαδόν κυκλικού τομέα				3π	49π

10 Να αντιστοιχίσετε τα εγγεγραμμένα σε κύκλο ακτίνας ρ κανονικά πολύγωνα της στήλης Α με τα εμβαδά των κυκλικών τομέων που αντιστοιχούν σε μια πλευρά των κανονικών πολυγώνων της στήλης Β.

Στήλη Α		Στήλη Β
Κανονικό πεντάγωνο	•	• $\frac{\pi \cdot \rho^2}{8}$
Κανονικό οκτάγωνο	•	• $\frac{\pi \cdot \rho^2}{10}$
Κανονικό δεκάγωνο	•	• $\frac{\pi \cdot \rho^2}{15}$
Κανονικό δεκαπεντάγωνο	•	• $\frac{\pi \cdot \rho^2}{5}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρώσετε καθέναν από τους παρακάτω τύπους:

i. $S = \frac{\pi \cdot \ldots \cdot \ldots}{180^\circ}$ ii. $S = \alpha \cdot \ldots$ iii. $E = \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \rho^2$ iv. $E = \frac{\pi \cdot \ldots \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$ v. $E = \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \rho$

2 Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Τόξο σε μοίρες		45°		15°
Τόξο σε ακτίνια	$\frac{\pi}{6}$		2π	

3 Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α με το κατάλληλο στοιχείο της στήλης Β.

	Επίκεντρες γωνίες σε μ°		Μήκος τόξου S σε κύκλο (Ο,ρ)
1	30°	α	$\frac{\pi\cdot\rho}{4}$
2	45°	β	$\frac{\pi\cdot\rho}{6}$
3	60°	γ	$\frac{\pi\cdot\rho}{2}$
4	90°	δ	$\frac{\pi\cdot\rho}{3}$
5	180°	ε	$\pi\cdot\rho$

4 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

i. Η διάμετρος ενός κύκλου με μήκος 56,77 cm είναι 18,07cm.
ii. Το εμβαδόν ενός κύκλου ακτίνας ρ = 6cm είναι 113,04 cm^2.
iii. Σε κύκλο (Ο,ρ) ισχύει: $\rho = \sqrt{\frac{E}{\pi}}$
iv. Σε κύκλο (Ο,ρ) ισχύει: $\delta = \frac{2\cdot E}{\rho}$.
v. Το εμβαδόν ημικυκλίου σε κύκλο (Ο,ρ) ισούται με: $\frac{\pi\cdot\rho^2}{2}$.

5 Η διάμετρος της Γης είναι 12800Km. Να βρείτε το μήκος του Ισημερινού της Γης.

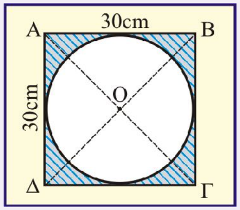
6 Η ακτίνα ενός κυκλικού δίσκου είναι 10cm να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

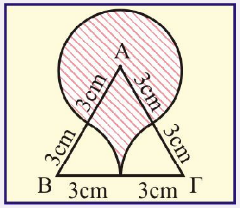
7 Να βρεθεί το εμβαδόν του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε κύκλο με ακτίνα 6cm και το εμβαδόν του καθενός από τα 4 μέρη του κύκλου που βρίσκονται εκτός του κύκλου.

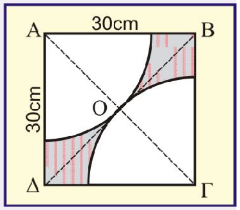
8 Σε έναν κύκλο με διάμετρο ΑΒ να φέρετε τις χορδές ΓΑ και ΓΒ. Αν $ΑΓ = 9cm$ και $ΒΓ = 12cm$ να υπολογίσετε την περίμετρο του κύκλου.

9 Δύο ίσοι κύκλοι με ακτίνα 12 cm τέμνονται. Αν η απόσταση των κέντρων τους είναι $12\sqrt{2}cm$, να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους τους.

10 Να υπολογίσετε τα εμβαδά των γραμμοσκιασμένων καμπυλόγραμμων σχημάτων στα παρακάτω σχήματα.







11 Οι περίμετροι δύο κύκλων έχουν λόγο 4 : 5. Να βρείτε το λόγο:

α. Των ακτίνων τους **β.** Των διαμέτρων τους **γ.** Των εμβαδών τους

12 Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού δακτυλίου που περικλείεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων με ακτίνες $ρ = 12$ cm και $R = 18$ cm.

13 Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έκαναν 1000 στροφές. Αν η διάμετρός τους είναι 80cm, να βρείτε πόσο διάστημα διήνυσαν.

14 Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα είναι $37{,}68cm^2$. Αν η ακτίνα του κύκλου είναι 6cm, να βρεθεί πόσες μοίρες είναι ο τομέας.

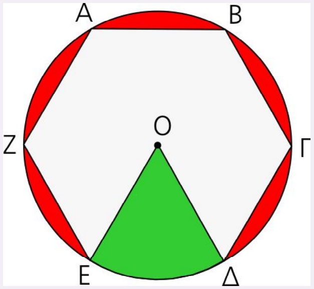
15 Σε έναν κύκλο ακτίνας $\rho = 5cm$ να περιγράψετε ένα κανονικό εξάγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρό του.

16 Σε ποια περίπτωση το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου και το μήκος του κύκλου εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό

17 Σε μια ευθεία ε παίρνουμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ. Κατασκευάζουμε τους κύκλους με διαμέτρους τα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ. Να δείξετε ότι το μήκος του κύκλου με διάμετρο ΑΔ είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των άλλων τριών κύκλων.

18 Σε έναν κύκλο (0,5cm) εγγράφουμε ένα κανονικό εξάγωνο όπως στο διπλανό σχήμα.
Να υπολογίσετε:

α) Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΕΔ}$
β) Το μήκος του κύκλου
γ) Το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου
δ) Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα της γωνίας $Ε\hat{Ο}Δ$

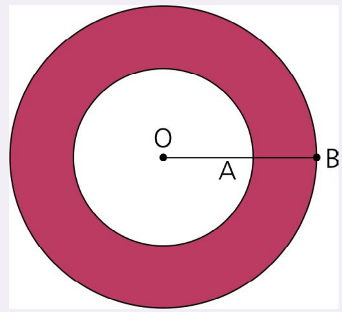


19 Σε κύκλο (K, 6cm) ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μήκος 3π cm. Να βρείτε:
α) το μέτρο του τόξου σε μοίρες
β) το εμβαδόν του κυκλικού τομέα της γωνίας $A\hat{K}B$.

20 Να βρείτε το μέτρο του τόξου σε ακτίνια αν το μέτρο του σε μοίρες είναι 75^o.

21 Το μήκος ενός κύκλου 40π. Να βρείτε το εμβαδόν του αντίστοιχου κυκλικού δίσκου.

22 Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου του διπλανού σχήματος όπου ΟΑ = 6m και ΟΒ = 8 m.



23 Να βρείτε το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 8cm.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

α. Το μήκος ενός κύκλου και η διάμετρός του τι ποσά είναι; Είναι δυνατόν ο λόγος της περιμέτρου ενός κύκλου προς τη διάμετρό του να είνα ίσος με 3;

β. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα ενός κύκλου, πως θα μεταβληθούν:

i. Το μήκος του κύκλου. ii. Το εμβαδόν του κύκλου.

γ. Τι είναι ο αριθμός π; Ρητός ή άρρητος;

Τι είναι κυκλικός τομέας, κυκλικός δακτύλιος και κυκλικό τμήμα;

ΘΕΜΑ 2

α. Γράψτε όλους τους τύπους που ισχύουν για το μήκος κύκλου, μήκος τόξου, εμβαδόν κυκλικού δίσκου, εμβαδόν κυκλικού τομέα και λύστε τους ως προς όλα τα μεγέθη.

β. Τι είναι τα ακτίνια; Ποια σχέση συνδέει τις μοίρες με τα ακτίνια ενός τόξου;

Ποιο είναι το μήκος τόξου α rad σε κύκλο ακτίνας ρ;

Πόσα rad είναι ένας κύκλος, ένα ημικύκλιο, ένα τεταρτημόριο; Πόσες μοίρες είναι 1 rad;

ΘΕΜΑ 3

Να βρείτε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου που είναι περιγγεγραμμένος σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 6m.

ΘΕΜΑ 4

Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός κυκλικού δακτυλίου που περικλείεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων με ακτίνες $\rho = 12$ m και $K = 15$ m.

ΘΕΜΑ 5

Μέσα σε ένα χωράφι σχήματος τετραγώνου κατασκευάστηκε το μεγαλύτερο δυνατό κυκλικό αλώνι, με ακτίνα 100cm. Να βρείτε:

α. Το μήκος της πλευράς του τετραγωνικού χωραφιού.

β. Την αξία του χωραφιού, αν κάθε τετραγωνικό μέτρο κοστίζει 10 €.

γ. Το εμβαδόν του χωραφιού που είναι έξω από το αλώνι.