

3.2 Κανονικά πολύγωνα

Ερώτηση 1

Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό; Ποια είναι τα στοιχεία του;

Απάντηση

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Γνωστά κανονικά πολύγωνα είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο.

Τα στοιχεία του κάθε πολυγώνου είναι:

α. Ο περιγεγραμμένος κύκλος.

Σε κάθε κανονικό πολύγωνο, υπάρχει ένας κύκλος (O, ρ) που περνά από όλες τις κορυφές του. Το πολύγωνο λέμε ότι είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O, ρ) .

β. Το κέντρο.

Κέντρο O του πολυγώνου ονομάζουμε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

γ. Η ακτίνα ρ .

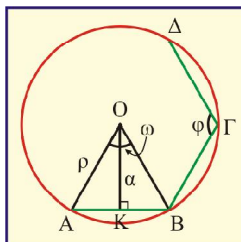
Ακτίνα ρ του πολυγώνου ονομάζουμε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.

δ. Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$.

Κάθε επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}$ που σχηματίζεται αν ενώσουμε το κέντρο του πολυγώνου με δύο διαδοχικές κορυφές του λέγεται κεντρική γωνία.

ε. Η γωνία $\hat{\phi}$ του πολυγώνου.

Γωνία $\hat{\phi}$ του κανονικού πολυγώνου ονομάζουμε καθεμιά από τις ίσες γωνίες που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του.



$\hat{\omega}$: Κεντρική γωνία

$\hat{\phi}$: Γωνία πολυγώνου

$\eta = AB$: Πλευρά πολυγώνου

$\alpha = OK$: Απόστημα

Ερώτηση 2

Ποιες σχέσεις ισχύουν για τα στοιχεία ενός κανονικού n -γώνου (πολυγώνου με n πλευρές);

Απάντηση

Οι βασικότερες σχέσεις σε κανονικό πολύγωνο με n πλευρές είναι:

$$i. \hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$$

$$ii. \hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^\circ$$

Ερώτηση 3

Πως κατασκευάζουμε ένα κανονικό πολύγωνο;

Απάντηση

Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

α. Γράφουμε κύκλο (O, ρ) και σχημα-

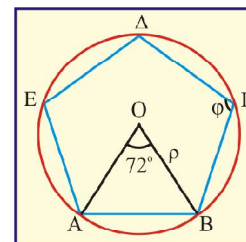
τίζουμε μια επίκεντρη γωνία $\hat{A}OB$. (Αυτό δεν είναι για όλα τα πολύγωνα εφικτό, π.χ. Αν θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κανονικό επτάγωνο του οποίου η κεντρική γωνία είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{7} = 51^\circ 42' 85'' \dots$$

δεν μπορούμε να το κάνουμε)

β. Με βάση έναν διαβήτη παίρνου-

με διαδοχικά ίσα τόξα όσο και το αρχικό, δηλαδή το \widehat{AB} .



Κατασκευή
κανονικού πενταγώνου

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

γ. Παίρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων και σχηματίζεται έτσι το κανονικό πολύγωνο.



Παρατήρηση

α. Ο αριθμός n των πλευρών ενός n -γώνου είναι ίδιος με τον αριθμό των κορυφών, των γωνιών, των αποστημάτων και των κεντρικών γωνιών του.

β. Από τη σχέση $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{n}$ έχουμε

$n = \frac{360^\circ}{\hat{\omega}}$. Άρα αν γνωρίζουμε την κεντρική γωνία ενός πολυγώνου μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των πλευρών του.

Αν π.χ. είναι $\hat{\omega} = 45^\circ$ τότε $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{45^\circ} = 8$. Συνεπώς το πολύγωνο είναι κανονικό οκτάγωνο.

γ. Όλα τα κανονικά πολύγωνα με άρτιο αριθμό πλευρών (τετράγωνα, εξαγωνα, οκτάγωνα...) έχουν κέντρο συμμετρίας το κέντρο τους. Τα κανονικά πολύγωνα με περιττό αριθμό πλευρών (ισόπλευρο τρίγωνο, πεντάγωνο, επτάγωνο...) δεν έχουν κέντρο συμμετρίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να υπολογίσετε την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ και τη γωνία $\hat{\phi}$:

- Ενός κανονικού 9 - γώνου.
- Ενός κανονικού 15 - γώνου.

Λύση

i. Η κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ του κανονικού εννιαγώνου είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$$

Για την κεντρική γωνία $\hat{\omega}$ και τη γωνία $\hat{\phi}$ ενός κανονικού πολυγώνου ισχύει η σχέση: $\hat{\omega} + \hat{\phi} = 180^\circ$ ή

$$\hat{\phi} = 180^\circ - \hat{\omega} \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 180^\circ - 40^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 140^\circ$$

ii. Ομοίως για το δεκαπεντάγωνο έχουμε:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{15} = 24^\circ \quad \text{και} \quad \hat{\phi} = 180^\circ - 24^\circ \quad \text{ή} \quad \hat{\phi} = 156^\circ$$

2

Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνο έχει κεντρική γωνία:

- 36°
- 20°
- 12°
- $\frac{1}{6}$ ορθής

Λύση

Από τη σχέση: $\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{v}$ έχουμε $v = \frac{360^\circ}{\omega}$, οπότε:

i. $v = \frac{360^\circ}{36^\circ}$ ή $v = 10$ (Κανονικό 10 - γωνο)

ii. $v = \frac{360^\circ}{20^\circ}$ ή $v = 18$ (Κανονικό 18 - γωνο)

iii. $v = \frac{360^\circ}{12^\circ}$ ή $v = 30$ (Κανονικό 30 - γωνο)

iv. $\hat{\omega} = \frac{1}{6}$ ορθής $= \frac{1}{6} 90^\circ$ ή $\hat{\omega} = 15^\circ$, οπότε έχουμε:

$v = \frac{360^\circ}{15^\circ}$ ή $v = 24$ (Κανονικό 24 - γωνο)

3

Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία $\hat{\omega} = 38^\circ$, ή με γωνία $\hat{\phi} = 155^\circ$.

Λύση

Έστω ότι υπάρχει κάποιο v -γωνο με $\hat{\omega} = 38^\circ$. Τότε:

$$v = \frac{360^\circ}{\omega} = \frac{360^\circ}{38^\circ} = 9,47 \text{ αδύνατο αφού ο } v \text{ είναι φυσικός αριθμός. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.}$$

Έστω πάλι, ότι υπάρχει κάποιο v -γωνο με $\hat{\phi} = 155^\circ$.

$$\text{Ισχύει: } \hat{\phi} + \hat{\omega} = 180^\circ \text{ ή } \hat{\omega} = 180^\circ - \hat{\phi}$$

$$\text{ή } \hat{\omega} = 180^\circ - 155^\circ \text{ ή } \hat{\omega} = 25^\circ$$

$$\text{Άρα: } v = \frac{360^\circ}{\omega} = \frac{360^\circ}{25^\circ} = 14,4 \text{ αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει τέτοιο πολύγωνο.

4

Σε κύκλο ακτίνας 6cm να εγγραφείτε κανονικό 12-γωνο.

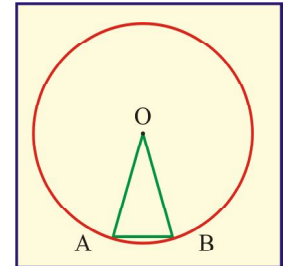
Λύση

Η κεντρική γωνία ενός κανονικού 12-γωνου είναι:

$$\hat{\omega} = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$$

Σε κύκλο (Ο,6cm) κατασκευάζουμε

την επίκεντρη γωνία, $\hat{AOB} = 30^\circ$. Η χορδή AB είναι η πλευρά του 12-γωνου, οπότε στη συνέχεια χωρίζουμε τον κύκλο σε 12 τόξα χορδής μήκους ίσου με της χορδής AB.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Η γωνία ενός κανονικού n -γώνιου είναι $180 - \frac{360}{n}$

β. Το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι κανονικό πολύγωνο

γ. Η γωνία του κανονικού πολυγώνου και η κεντρική γωνία του ίδιου κανονικού πολυγώνου είναι παραπληρωματικές

δ. Το ισοσκελές τρίγωνο είναι κανονικό πολύγωνο

ε. Ένα κανονικό n -γωνο έχει n ίσες γωνίες

2. Να αντιστοιχίσετε τις γωνίες πέντε κανονικών πολυγώνων της στήλης Α με τις κεντρικές γωνίες τους της στήλης Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
120 •	• 18
60 •	• 90
90 •	• 120
144 •	• 36
162 •	• 60

3. Σε ένα κανονικό δωδεκάγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι

Α. 180°

Β. 1180°

Γ. 1800°

Δ. 360°

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να συμπληρωθούν οι παρακάτω πίνακες:

i.

	Κεντρική γωνία πολύγону		Αριθμός πλευρών πολύγону
1	$\frac{2}{9}$ Ορθές	α	
2	45°	β	
3	12°	γ	
4		δ	16
5		ϵ	24

ii.

	Γωνία πολύγону		Αριθμός πλευρών πολύγону
1	140°	α	
2	165°	β	
3	$\frac{4}{3}$ Ορθές	γ	
		δ	4
		ϵ	5

2 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

- i. Η γωνία ενός πολύγону είναι πάντοτε μεγαλύτερη από την κεντρική γωνία του.
- ii. Υπάρχει κανονικό πολύγωνα με κεντρική γωνία 22° .
- iii. Το ισοσκελές τραπέζιο είναι κανονικό πολύγωνα.
- v. Μόνο στο τετράγωνα η κεντρική γωνία και η γωνία του πολύγону αυτού είναι ίσες.

3 Να βρείτε την κεντρική γωνία:

- α. Ισόπλευρο τρίγону β. Τετραγόνου γ. 8 - γώνου δ. 72-γώνου

4 Να βρείτε ποιο κανονικό πολύγωνα έχει κεντρική γωνία:

- α. $2,5^\circ$ β. $14,4^\circ$ γ. $22,5^\circ$ δ. 5° ε. 18°

5 Να βρείτε τη γωνία του κανονικού πολύγону με:

- α. $v = 10$ β. $v = 18$ γ. $v = 8$ δ. $v = 30$

- 6 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με: α. $\hat{\omega} = 28^\circ$ β. $\hat{\omega} = 44^\circ$ γ. $\hat{\omega} = 40^\circ$
- 7 Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με: α. $\hat{\phi} = 170^\circ$ β. $\hat{\phi} = 146^\circ$ γ. $\hat{\phi} = 156^\circ$
- 8 Να βρείτε την κεντρική γωνία, και την γωνία του:
α. κανονικού 16-γώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $\rho = 12$ cm.
β. κανονικού 25-γώνου εγγεγραμμένο σε κύκλο διαμέτρου $\delta = 8$ cm.
- 9 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός των διαγωνίων ενός κανονικού v -γώνου είναι: $\frac{v \cdot (v - 3)}{2}$
- 10 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός κανονικού v -γώνου είναι: $(2v - 4) \cdot 90^\circ$