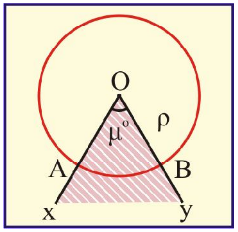
3.1 Εγγεγραμμένες γωνίες

Ερώτηση 1

Ποια γωνία λέγεται επίκεντρη; Τι λέμε αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας; Πότε λέμε ότι ένα τόξο είναι μ°;

Απάντηση

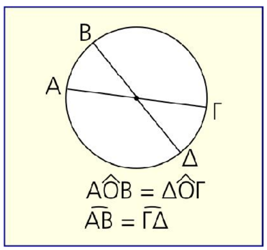


Επίκεντρη γωνία σε κύκλο (O,ρ) λέγεται κάθε γωνία $x\hat{O}y$ που έχει την κορυφή της στο κέντρο του κύκλου.
Αν οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας τέμνουν τον κύκλο (O,ρ) στα σημεία A και B λέμε ότι το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ είναι το αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας.
Επίσης λέμε ότι η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Ένα τόξο λέμε ότι είναι μ^o, όταν αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία μ^o.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΚΕΝΤΡΩΝ ΓΩΝΙΩΝ

• Σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο ισχύουν:

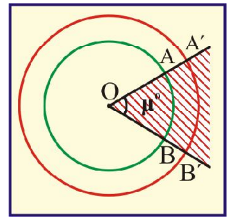
1. Ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα και τα αντίστοιχα τόξα τους και αντίστοφα.



2. Ίσα τόξα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες χορδές τους και ίσες χορδές έχουν και τα αντίστοιχα μικρά ή μεγάλα τόξα τους ίσα (Σε κάθε χορδή ενός κύκλου αντιστοιχούν δύο τόξα, ένα “μικρό” και ένα “μεγάλο”).
3. Δύο τόξα μ^o είναι ίσα.

• Τα τόξα και οι γωνίες μετριούνται με τις ίδιες μονάδες.

Προσοχή!!!
Δεν μπορούμε να κάνουμε σύγκριση τόξων σε άνισους κύκλους. Δύο τόξα μ^o είναι ίσα **μόνο** όταν είναι τόξα του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων.

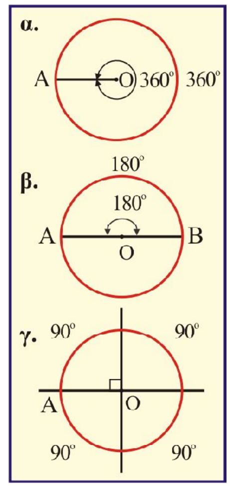


Δηλαδή δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A'B'}$ μ^o όταν ανήκουν σε άνισους κύκλους, δεν μπορεί να είναι ίσα, ενώ οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O}B'$ είναι πάντα ίσες.

Ερώτηση 2

Πόσων μοιρών είναι:
α. Ένας κύκλος, β. Ένα ημικύκλιο,
γ. Καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους του;

Απάντηση

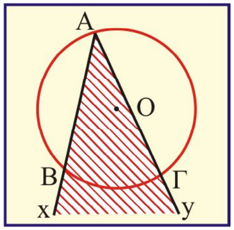


α. Κάθε κύκλος είναι τόξο 360° και αντιστοιχεί στην πλήρη επίκεντρη γωνία.
β. Κάθε ημικύκλιο είναι τόξο 180° και αντιστοιχεί στην ευθεία επίκεντρη γωνία.
γ. Κάθε τεταρτοκύκλιο είναι 90° και αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 90° (1^L).

Ερώτηση 3

α. Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;
β. Ποια είναι η σχέση της εγγεγραμμένης γωνιάς προς την επίκεντρη η οποία αντιστοιχεί στο ίδιο τόξο; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας στην περίπτωση που μια πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας περνάει από το κέντρο του κύκλου.

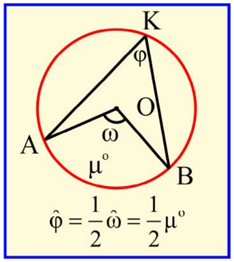
Απάντηση



α. Εγγεγραμμένη γωνία σε κύκλο (Ο,ρ), λέγεται κάθε γωνία $x\hat{A}y$ που έχει την κορυφή της στον κύκλο και οι πλευρές της **τέμνουν** τον κύκλο.

Το τόξο $\overset{\frown}{Β Γ}$ του κύκλου (Ο,ρ) ονομάζεται αντίστοιχο τόξο της εγγεγραμμένης γωνίας $x\hat{A}y$.

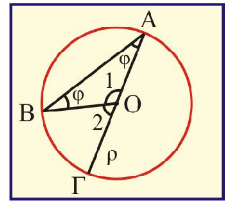
Λέμε ακόμα ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{ΒΑΓ}$ <u>βαίνει</u> στο τόξο $\overset{\frown}{ΒΓ}$.



β. Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας, που βαίνει στο ίδιο τόξο. (Με άλλα λόγια, η εγγεγραμμένη γωνία σε μοίρες είναι ίση με το μισό του αντίστοιχου τόξου της.)

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία φ είναι εγγεγραμμένη και O_2, η αντίστοιχη επίκεντρη.



Από το σχήμα ισχύουν:

$OA = OB = \rho$,

οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.

Άρα: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\varphi}$. Επίσης:

$\hat{O}_1 + \hat{A} + \hat{B} = 180^{o}$ ή $\hat{O}_1 + 2\hat{\varphi} = 180^{o}$

ή $2\hat{\varphi} = 180^{o} - \hat{O}_1$ (1)

Αλλά: $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 180^{o}$ (παραπληρωματικές)

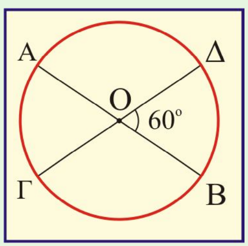
$\hat{O}_2 = 180^{o} - \hat{O}_1$ (2)

Από τις σχέσεις (1), (2) προκύπτει: $2\hat{\varphi} = \hat{O}_2$ ή $\hat{\varphi} = \frac{1}{2}\hat{O}_2$

1. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
2. Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.
3. Αν δύο εγγεγραμμένες γωνίες είναι ίσες τότε τα τόξα στα οποία βαίνουν είναι ίσα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1



Οι διάμετροι στον παραπάνω κύκλο σχηματίζουν γωνία 60°. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ο κύκλος από τις διαμέτρους αυτές.

Λύση

Οι γωνίες $Β\hat{O}Δ$ και $Γ\hat{O}A$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

Άρα: $\overset{\frown}{ΒΔ} = \overset{\frown}{ΑΓ} = 60^{o}$.

Επίσης οι γωνίες $Γ\hat{O}B$ και $A\hat{O}Δ$ είναι ίσες ως κατακορυφήν.

Όπως γνωρίζουμε ο κύκλος αντιστοιχεί σε γωνια 360°.

Άρα: $\Gamma\hat{O}B + A\hat{O}\Delta = 360^\circ - (B\hat{O}\Delta + \Gamma\hat{O}A) =$

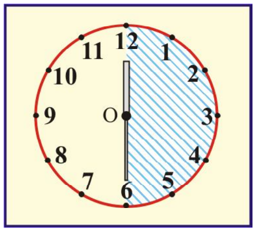
$= 360^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 360^\circ - 120^\circ = 240^0$

Συνεπώς: $\overset{\frown}{A\Delta} = \overset{\frown}{\Gamma B} = \dfrac{240^\circ}{2} = 120^\circ$

2 Να υπολογίσετε πόσων μοιρών είναι το τόξο που διαγράφει η άκρη του λεπτοδείκτη ενός ρολογιού σε 30 λεπτά. Σε πόσο χρόνο η άκρη του λεπτοδείκτη διαγράφει τόξο 90ο;

Λύση

Η άκρη του λεπτοδείκτη διαγράφει έναν κύκλο, δηλαδή 360ο σε 60 λεπτά. Άρα σε 30 λεπτά θα διαγράψει τόξο ίσο με:



$\dfrac{30}{60} \cdot 360^\circ = \dfrac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ$

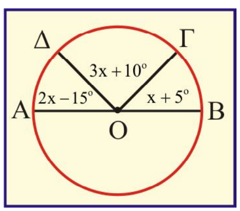
Η άκρη του ωροδείκτη διαγράφει τόξο 360ο σε 12 ώρες. Άρα τόξο 90ο διαγράφει η άκρη του ωροδείκτη σε:

$\dfrac{90^\circ}{360^\circ} \cdot 12 = \dfrac{1}{4} \cdot 12 = 3$ ώρες

3 Να υπολογίσετε πόσων μοιρών είναι καθένα από τα τόξα: $\overset{\frown}{A\Delta}$, $\overset{\frown}{\Delta\Gamma}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$

Λύση

Αφού το ημικύκλιο είναι τόξο 180ο θα ισχύει: $\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} + \overset{\frown}{B\Gamma} = 180^\circ$ ή



$(2x - 15^\circ) + (3x + 10^\circ) + (x + 5^\circ) = 180^\circ$

ή $2x - 15^\circ + 3x + 10^\circ + x + 5^\circ = 180^\circ$ ή

$6x = 180^\circ$ ή $x = 30^\circ$

Άρα: $\overset{\frown}{A\Delta} = 2x - 15 = 2 \cdot 30 - 15 = 45^\circ$,

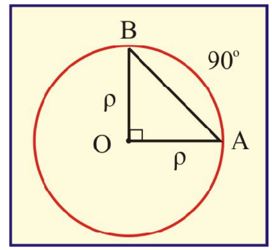
$\overset{\frown}{\Delta\Gamma} = 3x + 10 = 3 \cdot 30 + 10 = 100^\circ$

$\overset{\frown}{\Gamma B} = x + 5 = 30 + 5 = 35^\circ$.

4 Να γράψετε έναν κύκλο (Ο,ρ) και μία επίκεντρη γωνία του $A\hat{O}B$ που να βαίνει σε τεταρτοκύκλιο. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΒ.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι κάθε τεταρτοκύκλιο είναι 90ο. Το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές αφού ΑΟ = ΟΒ = ρ. Άρα $\hat{A} = \hat{B}$. Επίσης ξέρουμε ότι



$\hat{A} + \hat{B} + \hat{O} = 180^\circ$ ή $2\hat{A} + 90^0 = 180^\circ$

ή $2\hat{A} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ ή $\hat{A} = 45^\circ$. Άρα $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$.

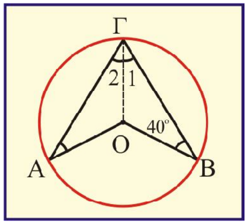
5 Δίνεται επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B = 100^\circ$ σε κύκλο (Ο,ρ) και η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}A$ τέτοια ώστε το Ο να περιέχεται σ' αυτή και $O\hat{B}\Gamma = 40^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $B\hat{\Gamma}A$ και $O\hat{A}\Gamma$.

Λύση

Η εγγεγραμμένη γωνία $B\hat{\Gamma}A$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$.

Άρα θα ισχύει: $B\hat{\Gamma}A = \dfrac{A\hat{O}B}{2} = \dfrac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

Αν φέρουμε την ακτίνα ΟΓ θα έχουμε: $O\Gamma = OB = \rho$, δηλαδή



το τρίγωνο ΟΒΓ θα είναι ισοσκελές, άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}_1 = 40^\circ$.

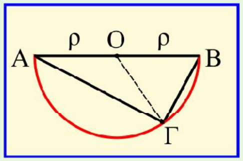
Από το σχήμα βλέπουμε ότι ισχύει:

$\hat{\Gamma}_2 = B\hat{\Gamma}A - \hat{\Gamma}_1 = 50^\circ - 40^\circ = 10^\circ$

Και επειδή $OA = O\Gamma = \rho$, το τρίγωνο ΑΟΓ θα είναι ισοσκελές, οπότε:

$$\hat{A} = \hat{\Gamma}_2 = 10^\circ \quad \text{ή} \quad O\hat{A}\Gamma = 10^\circ$$

6



Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 6cm και σημείο Γ του ημικυκλίου, ώστε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 3\overset{\frown}{\Gamma B}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Έχουμε: $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma B} = \overset{\frown}{AB}$ ή $3\overset{\frown}{\Gamma B} + \overset{\frown}{\Gamma B} = 180^\circ$ ή
$4\overset{\frown}{\Gamma B} = 180^\circ$ ή $\overset{\frown}{\Gamma B} = 45^\circ$

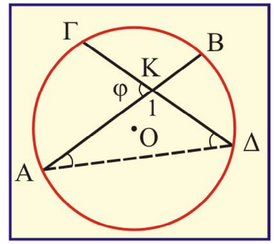
Άρα $\overset{\frown}{A\Gamma} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$. Οπότε $\hat{A} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \dfrac{45^\circ}{2} = 22{,}5^\circ$,

$\hat{B} = \dfrac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \dfrac{135^\circ}{2} = 67{,}5^\circ$ $\hat{\Gamma} = 180^\circ - (22{,}5^\circ + 67{,}5^\circ)$ ή $\hat{\Gamma} = 90^\circ$

7

Σε κύκλο κέντρου Ο, οι χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Κ. Να δείξετε ότι η γωνία $\hat{\varphi}$ δίνεται από τη σχέση: $\hat{\varphi} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$, όπου $\overset{\frown}{B\Delta}$, $\overset{\frown}{A\Gamma}$ τα μέτρα των τόξων.

Λύση



Φέρνουμε τη χορδή ΑΔ. Για τις εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$ ισχύουν:

$$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2}, \quad \hat{\Delta} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} \quad (1)$$

Στο τρίγωνο ΚΑΔ έχουμε:

$$\hat{K}_1 = 180^\circ - \hat{A} - \hat{\Delta} \quad \text{και}$$

$$\hat{\varphi} = 180^\circ - \hat{K}_1 \left(\hat{\varphi}, \hat{K}_1 \text{ παραπληρωματικές}\right)$$

Οπότε από τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε:

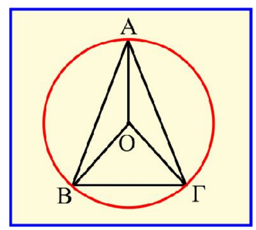
$$\hat{\varphi} = 180^\circ - \left(180^\circ - \hat{A} - \hat{\Delta}\right) = 180^\circ - 180^\circ + \hat{A} + \hat{\Delta} =$$

$$= \hat{A} + \hat{\Delta} \overset{(1)}{=} \frac{\overset{\frown}{B\Delta}}{2} + \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{B\Delta} + \overset{\frown}{A\Gamma}}{2}$$

8

Σε κύκλο (Ο,ρ) να πάρετε δύο διαδοχικές επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B = 140^\circ$ και $B\hat{O}\Gamma = 60^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



Γνωρίζουμε ότι το μέτρο μιας επίκεντρης γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου στο οποίο βαίνει.

Άρα θα έχουμε:

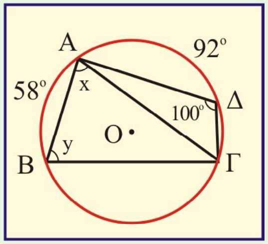
$\overset{\frown}{AB} = 140^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60^\circ$, $\overset{\frown}{\Gamma A} = 360^\circ - (140^\circ + 60^\circ) = 160^\circ$.

Άρα οι γωνίες του τριγώνου είναι:

$$\hat{A} = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ, \qquad \hat{B} = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ, \qquad \hat{\Gamma} = \frac{140^\circ}{2} = 70^\circ.$$

9

Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{x}, \hat{y}$ στο σχήμα.



Λύση

Έχουμε: $\overset{\frown}{AB\Gamma} = 2 \cdot 100^\circ = 200^\circ$.

Άρα: $\overset{\frown}{B\Gamma} = 200^\circ - 58^\circ = 142^\circ$

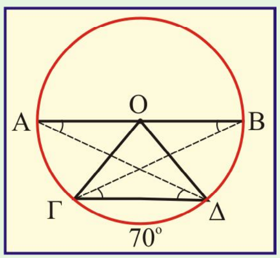
και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 360^\circ - (200^\circ + 92^\circ) = 68^\circ$

Οπότε: $\hat{x} = \dfrac{\overset{\frown}{B\Gamma}}{2} = \dfrac{142^\circ}{2} = 71^\circ$ και

$$\hat{y} = \frac{\overset{\frown}{A\Gamma}}{2} = \frac{\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma}}{2} = \frac{92^\circ + 68^\circ}{2} = 80^\circ$$

10

Να υπολογίστει το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma}$ στο παρακάτω σχήμα αν ΑΒ//ΓΔ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 70^\circ$.



Λύση

Φέρνουμε τις χορδές ΑΔ και ΒΓ. Επειδή ΑΒ//ΓΔ ισχύει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Οπότε: $\overset{\frown}{A\Gamma} = \overset{\frown}{B\Delta}$.

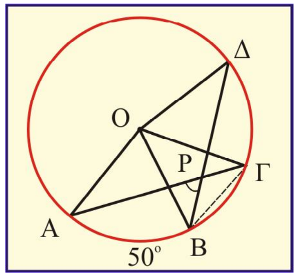
Αλλά $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{B\Delta} = 180^\circ$ ή $\overset{\frown}{A\Gamma} + \overset{\frown}{A\Gamma} + 70^\circ = 180^\circ$ ή

$2\overset{\frown}{A\Gamma} = 180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$ ή $\overset{\frown}{A\Gamma} = \dfrac{110^\circ}{2} = 55^\circ$.

11

Να γράψετε κύκλο (Ο,ρ). Πάρτε δύο τόξα $\overset{\frown}{AB} = 50^\circ$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 60^\circ$. Αν οι χορδές ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ρ να υπολογίσετε τη γωνία $A\hat{P}B$.

Λύση



Φέρνουμε τη χορδή ΒΓ. Η εγγεγραμμένη γωνία $\Delta\hat{B}\Gamma$ είναι ίση με:

$$\Delta\hat{B}\Gamma = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ.$$

Ομοίως $A\hat{\Gamma}B = \dfrac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

$A\hat{P}B + B\hat{P}\Gamma = 180^\circ$ οπότε $A\hat{P}B = 180^\circ - B\hat{P}\Gamma$.

Η γωνία $B\hat{P}\Gamma$ είναι ίση με:

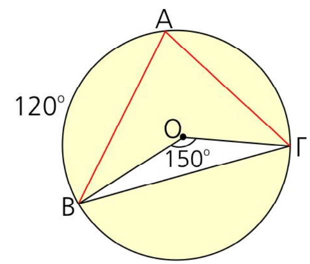
$$B\hat{P}\Gamma = 180^\circ - (\Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{\Gamma}B) = 180^\circ - (30^\circ + 25^\circ) = 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

Οπότε $A\hat{P}B = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να αντιστοιχίσετε τις εγγεγραμμένες γωνίες της αριστερής στήλης με τα μέτρα τους της δεξιάς στήλης.

Εγγεγραμένη γωνία	Μέτρα γωνιών
i) $A\hat{B}\Gamma$ •	• 1) 60°
ii) $A\hat{\Gamma}B$ •	• 2) 75°
iii) $B\hat{A}\Gamma$ •	• 3) 45°

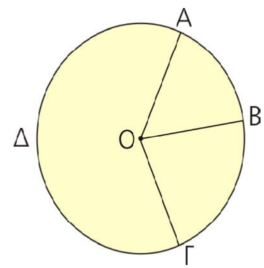


2 Να επιλέξετε τις σωστές απαντήσεις στις παρακάτω προτάσεις:

Στο διπλανό σχήμα ισχύει:

1) α) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$ β) $B\hat{A}\Gamma = B\hat{O}\Gamma$ γ) $B\hat{A}\Gamma = \dfrac{B\hat{O}\Gamma}{2}$

2) α) $\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{B\Gamma}$ β) $\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = \Gamma\hat{A}\Delta + A\hat{B}\Delta$ γ) $\overset{\frown}{A\Delta} + \overset{\frown}{\Delta\Gamma} = A\hat{O}\Gamma$



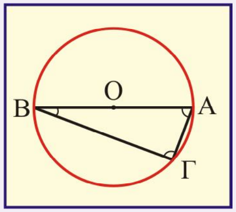
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και τα σημεία Α, Β, Γ, Δ του κύκλου που σχηματίζουν τετράγωνο.
Ισχύει: **Α.** $A\hat{O}B = 30^\circ$ **Β.** $A\hat{O}B = 90^\circ$ **Γ.** $A\hat{O}B = 135^\circ$ **Δ.** $A\hat{O}B = 160^\circ$

ii. Αν σε κύκλο (Ο,ρ) η χορδή ΑΒ = ρ τότε το τρίγωνο ΑΟΒ είναι:
Α. Σκαληνό **Β.** Ισοσκελές **Γ.** Ισόπλευρο **Δ.** Τίποτα από τα προηγούμενα

2 Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος:



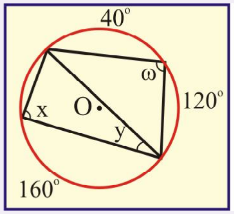
i. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ii. $\hat{B} + \hat{A} = 90^\circ$ iii. $\hat{A} = 90^\circ$ iv. $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$

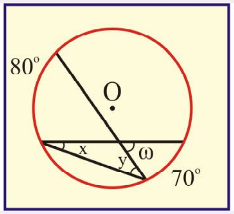
3 Σε έναν κύκλο (Ο,ρ) είναι $\overset{\frown}{AB} = 55^\circ$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 75^\circ$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 95^\circ$. Να υπολογίσετε τις επίκεντρες γωνίες που βαίνουν στα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.

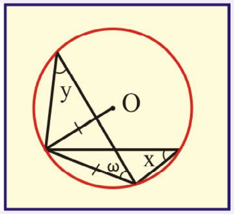
4 Σε έναν κύκλο (Ο,ρ) να πάρετε τα σημεία Α, Β, Γ, Δ ώστε να είναι $A\hat{O}\Gamma = 160^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{B}\Gamma$.

5 Δίνεται κύκλος (0,6cm) και σημείο το Α. Γράφουμε κύκλο (Α,4cm) που τέμνει τον πρώτο κύκλο στα σημεία Β, Γ. Να εξηγήσετε γιατί $A\hat{O}B = A\hat{O}\Gamma$.

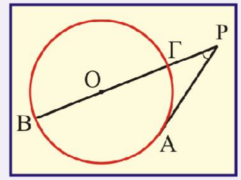
6 Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{\omega}$ στα παρακάτω σχήματα.





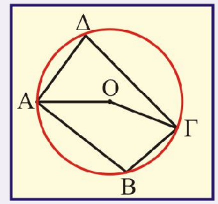


7 Στο διπλανό σχήμα, η ΡΑ είναι εφαπτομένη του κύκλου. Αν το τόξο $\overset{\frown}{ΑΓ} = 70°$, να υπολογιστεί η γωνία $Α\hat{Ρ}Β$.



8 Σε κύκλο (Ο,ρ), η επίκεντρη γωνία $Α\hat{Ο}Β$ είναι ίση με την εγγεγραμμένη στο τόξο $\overset{\frown}{ΓΔ}$. Ποια είναι η σχέση που συνδέει τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$;

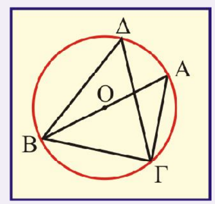
9 Στο διπλανό σχήμα, αν είναι $\overset{\frown}{ΑΒΓ} = 178°$, να βρείτε τις γωνίες $Α\hat{Δ}Γ$ και $Α\hat{Β}Γ$.



10 Σε κύκλο (Ο,ρ) να εγγράψετε τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ τέμνει τον κύκλο στο Ρ και ισχύει $Ο\hat{Α}Ρ = Δ\hat{Α}Ρ$, να δικαιολογήσετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

11 Σε έναν κύκλο (Ο,ρ), να πάρετε δύο διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΒΓ}$ και να φέρετε τη διάμετρο ΒΔ. Αν είναι $Δ\hat{Β}Γ = 68°$, να βρείτε τη γωνία $Β\hat{Α}Γ$.

12 Στο διπλανό σχήμα, αν είναι $Α\hat{Β}Γ = 38°$, να βρείτε τη γωνία $\hat{Δ}$.



13 Σε έναν κύκλο (Ο,ρ), να γράψετε μία διάμετρο ΑΒ και την ακτίνα ΟΓ έτσι ώστε $Α\hat{Ο}Γ = 110°$. Αν ΟΡ, ΟΚ είναι διχοτόμοι των γωνιών $Α\hat{Ο}Γ$ και $Β\hat{Ο}Γ$, να δικαιολογήσετε ότι οι ακτίνες ΟΡ, ΟΚ είναι κάθετες.

14 Σε ένα ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ να πάρετε ένα σημείο Γ, έτσι ώστε $Α\hat{Β}Γ = 48°$ και να φέρετε την εφαπτομένη ΑΔ του ημικυκλίου στο σημείο Α. Να βρείτε τη γωνία $Γ\hat{Α}Δ$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

α. Ποια γωνία λέγεται επίκεντρη; Δύο τόξα μ^o πότε είναι ίσα;

β. Αν διπλασιαστεί , τριπλασιαστεί κ.ο.κ., ένα τόξο η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία τι κάνει;

ΘΕΜΑ 2

α. Πόσων μοιρών είναι:

i. Ένας κύκλος ii. Ένα ημικύκλιο

iii. Καθένα από τα τόξα στα οποία χωρίζεται ένας κύκλος από δύο κάθετες διαμέτρους;

β. Ποια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη; Ποια η σχέση της με την επίκεντρη που βαίνει στο ίδιο τόξο; Αποδείξτε το.

ΘΕΜΑ 3

Ποιο είναι το είδος μιας εγγεγραμμένης γωνίας που:

i. Βαίνει σε ημικύκλιο.

ii. Η μια πλευρά της διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

iii. Βαίνει σε τόξο μεγαλύτερου του ημικυκλίου.

iv. Βαίνει σε τόξο μικρότερο του ημικυκλίου.

ΘΕΜΑ 4

Σε κύκλο (Ο,ρ), να πάρετε μια χορδή ΑΒ = ρ. Να υπολογίσετε τα τόξα του κύκλου που έχουν χορδή την ΑΒ και τις εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στα τόξα αυτά.

ΘΕΜΑ 5

Σε έναν κύκλο να γράψετε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ, ΓΔ. Να δικαιολογήσετε ότι οι χορδές ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες.