

## 2.4 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας 30°, 45°, 60°.

### Ερώτηση 1

Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς 45°;

### Απάντηση

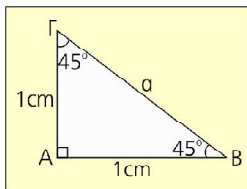
Πρώτα πρέπει να κατασκευάσουμε ορθογώνιο τρίγωνο με οξείες γωνίες 45°. Αυτό είναι το ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), γιατί  $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$ .

Αν υποθέσουμε ότι  $AB = AG = 1\text{cm}$ , τότε με Πυθαγόρειο θεώρημα υπολογίζουμε την  $B\Gamma = a$ . Έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad a^2 = 1^2 + 1^2 \quad \text{ή} \quad a^2 = 2 \quad \text{ή} \quad a = \sqrt{2}\text{cm}$$

$$\text{Έτσι: } \eta\mu B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \epsilon\phi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{1}{1} = 1$$

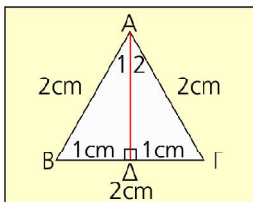


### Ερώτηση 2

Πως υπολογίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 30° και 60°;

### Απάντηση

Γνωρίζουμε ότι ένα ισοπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες του ίσες



με 60°. Κατασκευάζουμε λοιπόν ισοπλευρο τρίγωνο πλευράς 2cm και φέρνουμε το ύψος του ΑΔ που είναι και διάμεσος (δηλαδή  $\Delta\Gamma = 1\text{cm}$ ) και διχοτόμος της γωνίας Α (άρα  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$ ).

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε:

$$A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad u^2 + 1^2 = 2^2 \quad \text{ή} \quad u^2 = 4 - 1 \quad \text{ή}$$

$$u^2 = 3 \quad \text{ή} \quad u = \sqrt{3}$$

Στο τρίγωνο ΑΔΓ:

$$\eta\mu 60^\circ = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{1}{2},$$

$$\epsilon\phi 60^\circ = \frac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$$\text{Επίσης} \quad \eta\mu 30^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{A\Gamma} = \frac{1}{2}, \quad \sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\epsilon\phi 30^\circ = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Τελικά διαπιστώνουμε ότι:

$$\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ = \frac{1}{2},$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \epsilon\phi 30^\circ = \frac{1}{\epsilon\phi 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

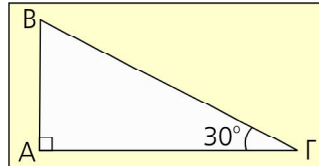
Να αποδείξετε ότι αν το ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχει μια οξεία γωνία ίση με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι αυτής της γωνίας κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

## Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία  $\Gamma$  είναι ίση με  $30^\circ$ , θα αποδείξουμε ότι

$$AB = \frac{B\Gamma}{2}.$$

$$\text{Ισχύει: } \eta\mu 30^\circ = \frac{AB}{B\Gamma} \text{ ή } 0,5 = \frac{AB}{B\Gamma} \text{ ή } AB = 0,5 \cdot B\Gamma \text{ ή } AB = \frac{B\Gamma}{2}$$



2

Αν είναι  $\omega = 45^\circ$  και  $\phi = 60^\circ$ , να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2\sigma\upsilon\omega \cdot \sigma\upsilon\phi + \eta\mu^2\omega - 2\eta\mu\omega \cdot \eta\mu\phi$$

$$B = (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 + (\sigma\upsilon\omega + \eta\mu\omega)^2 - (\sigma\upsilon\phi - \eta\mu\phi)$$

## Λύση

Αφού  $\omega = 45^\circ$  θα είναι  $\eta\mu\omega = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$  και  $\sigma\upsilon\omega = \sigma\upsilon\upsilon 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Ομοίως όταν  $\phi = 60^\circ$  έχουμε

$\eta\mu\phi = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$  και  $\sigma\upsilon\phi = \sigma\upsilon\upsilon 60^\circ = \frac{1}{2}$ . Επομένως:

$$A = 2\sigma\upsilon\omega \cdot \sigma\upsilon\phi + \eta\mu^2\omega - 2\eta\mu\omega \cdot \eta\mu\phi =$$

$$2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{6}}{2}$$

$$B = (\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\omega)^2 + (\sigma\upsilon\omega + \eta\mu\omega)^2 - (\sigma\upsilon\phi - \eta\mu\phi) =$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 - \frac{(1-\sqrt{3})^2}{4} = 2 - \frac{(1-\sqrt{3})^2}{4}$$

3

Να αποδείξετε τις παρακάτω ισότητες

α)  $\sigma\upsilon\upsilon^2 60^\circ + \eta\mu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\upsilon^2 30^\circ = 3/2$ .

β)  $2\sigma\upsilon\upsilon 60^\circ + 2\eta\mu 30^\circ - 2\epsilon\phi 45^\circ = 0$ .

## Απόδειξη

α) Έχουμε

$$\sigma\upsilon\upsilon^2 60^\circ + \eta\mu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\upsilon^2 30^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{1+2+3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{6:2}{4:2} = \frac{3}{2}$$

β) Έχουμε  $2\sigma\upsilon\upsilon 60^\circ + 2\eta\mu 30^\circ - 2\epsilon\phi 45^\circ =$

$$2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 = 1 + 1 - 2 = 2 - 2 = 0$$

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Είναι  $\eta\mu 30^\circ = \sigma\upsilon\nu 60^\circ$

β. Ισχύει ότι  $\eta\mu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ = 1$

γ. Ισχύει ότι  $\epsilon\phi 45^\circ = \eta\mu 45^\circ$

δ. Είναι  $\sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ = 1$

ε. Είναι  $\epsilon\phi 45^\circ \cdot \epsilon\phi 45^\circ = 2$


2 Επιλέξτε την σωστή απάντηση από τις παρακάτω ερωτήσεις:

α) Το  $\eta\mu 45^\circ$  είναι ίσο με

A.  $\epsilon\phi 45^\circ$

B.  $\eta\mu 60^\circ$

Γ.  $\sigma\upsilon\nu 45^\circ$

Δ.  $\sigma\upsilon\nu 60^\circ$ .

β) Η παράσταση  $\eta\mu 45^\circ \cdot \epsilon\phi 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$  ισούται με:

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

Γ.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Δ.  $\frac{1}{2}$

E. 1

3 Να συμπληρώσετε το κενό.

α)  $\eta\mu 30^\circ + \eta\mu 45^\circ + \eta\mu 60^\circ =$

β)  $5 + \eta\mu 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 45^\circ =$

γ)  $2 \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ =$

4 Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

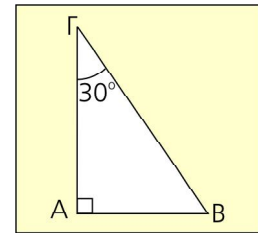
A.  $AB = 2 \cdot A\Gamma$

B.  $AB = A\Gamma$

Γ.  $AB = 3A\Gamma$

Δ.  $AB = \frac{1}{2}B\Gamma$

Ε.  $AB = B\Gamma$



### ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές  $AB = 3$  cm,  $B\Gamma = 5$  cm,  $A\Gamma = 4$  cm.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε το  $\eta\mu A$  και το  $\sigma\upsilon\nu A$ .

2 Να βρείτε την τιμή της παράστασης  $A = 2\sigma\upsilon\nu^2\varphi - \eta\mu\varphi$  στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)  $\varphi = 30^\circ$

β)  $\varphi = 45^\circ$

γ)  $\varphi = 60^\circ$

3 Ένα αεροπλάνο πετά σε ύψος 3000m και φαίνεται από τον πύργο ελέγχου του αεροδρομίου με γωνία  $30^\circ$ . Ποια είναι η οριζόντια απόσταση του από τον πύργο ελέγχου;

4 Αν είναι  $\hat{\omega} = 30^\circ$  και  $\hat{\varphi} = 45^\circ$ , να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων.

$$A = 2\sigma\upsilon\nu\omega \cdot \eta\mu\varphi + 2\sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu\omega, B = \sigma\upsilon\nu\varphi \cdot \eta\mu\omega + \eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega \quad \text{και}$$

$$\Gamma = (\eta\mu\varphi - \sigma\upsilon\nu\varphi)^2 + 2\eta\mu\omega - 4\eta\mu\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

5

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$A = \eta\mu 30^\circ \cdot \eta\mu 60^\circ + \sigma\upsilon\nu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ$$

$$B = \epsilon\phi^2 45^\circ + \epsilon\phi^2 60^\circ$$

6

Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ με ΑΒ = 16cm, ΒΓ = 14cm και  $\hat{\Delta} = 30^\circ$ .

7

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2\sigma\upsilon\nu 30^\circ - \sigma\upsilon\nu 60^\circ + 4\sigma\upsilon\nu 45^\circ$$

$$B = 3\eta\mu 30^\circ - 2\sigma\upsilon\nu 60^\circ + 5\epsilon\phi 45^\circ$$

$$\Gamma = 6\epsilon\phi 30^\circ \cdot \epsilon\phi 60^\circ - 3\epsilon\phi 45^\circ$$

8

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ = ΑΓ = 20cm και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Να υπολογίσετε:

α) το ύψος ΑΔ

β) την περίμετρο του τριγώνου

γ) το εμβαδόν του τριγώνου

## ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

### ΘΕΜΑ 1

Αν οι γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  είναι οξείες ενός ορθογωνίου τριγώνου, να αποδείξετε:

$$\text{i. } \eta\mu^2\omega + \eta\mu^2\varphi = 1 \qquad \text{ii. } \epsilon\varphi\omega = \frac{\sigma\upsilon\nu\varphi}{\eta\mu\varphi}$$

### ΘΕΜΑ 2

Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού  $a$  έχουν νόημα οι παρακάτω ισότητες, όπου  $\omega$  οξεία γωνία:

$$\text{i. } \eta\mu\omega = a \qquad \text{ii. } \sigma\upsilon\nu\omega = a \qquad \text{iii. } \epsilon\varphi\omega = a$$

### ΘΕΜΑ 3

Αν  $\omega$  είναι οξεία γωνία, να αποδείξετε:

$$\text{i. } \eta\mu^2\omega = \frac{\epsilon\varphi^2\omega}{1 + \epsilon\varphi^2\omega} \qquad \text{ii. } \eta\mu^2\omega \cdot \epsilon\varphi^2\omega = \epsilon\varphi^2\omega - \eta\mu^2\omega$$

### ΘΕΜΑ 4

Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , φέρνουμε το ύψος  $AD = u$ . Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu B}{\beta} = \frac{\eta\mu\Gamma}{\gamma}$

### ΘΕΜΑ 5

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\text{α. } A = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 30^\circ + \eta\mu^2 45^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ - \eta\mu^2 60^\circ - \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ}{2\eta\mu 30^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 60^\circ}$$

$$\text{β. } B = \epsilon\varphi 45^\circ - \frac{\eta\mu 45^\circ}{2\sigma\upsilon\nu 45^\circ \cdot \eta\mu 30^\circ}$$