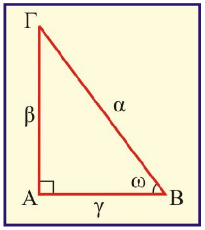
2.2 Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Ερώτηση 1

Πώς ορίζονται το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση



Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο της γωνίας ω**.
Δηλαδή:

$$ημω = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{β}{α} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω**.

Δηλαδή: $συνω = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{γ}{α} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$

Ερώτηση 2

Πως ορίζεται το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ $\left(\widehat{Α} = 90°\right)$;

Απάντηση

Η γωνία Γ έχει απέναντι κάθετη την ΑΒ = γ και προσκείμενη κάθετη πλευρά, την ΑΓ = β. Άρα:

$$ημΓ = \frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{γ}{α} \quad \text{και} \quad συνΓ = \frac{ΑΓ}{ΒΓ} = \frac{β}{α}$$

Ερώτηση 3

Διαπιστώσαμε ότι $ημΒ = \frac{β}{α}$ και $συνΓ = \frac{β}{α}$, δηλαδή ότι $ημΒ = συνΓ$. Αυτό ισχύει σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο;

Απάντηση

Βεβαίως. Το ημίτονο της μίας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου ισούται με το συνημίτονο της άλλης οξείας γωνίας του.

Ερώτηση 4

Τι τιμές μπορούν να πάρουν το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας;

Απάντηση

Σαν λόγοι μηκών ευθύγραμμων τμημάτων, το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας, είναι θετικοί αριθμοί. Γνωρίζουμε όμως ότι η υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι η μεγαλύτερη πλευρά του. Το ημίτονο και το συνημίτονο έχουν στον παρονομαστή την υποτείνουσα,είναι δηλαδή λόγοι με αριθμητή μικρότερο του παρονομαστή. Άρα οι τιμές του ημιτόνου και του συνημιτόνου είναι μικρότερες του 1. Ισχύουν δηλαδή:

$$0 < ημω < 1 \quad \text{και} \quad 0 < συνω < 1$$

Παρατήρηση:
Αν τώρα διαιρέσουμε το ημω με το συνω θα προκύψει

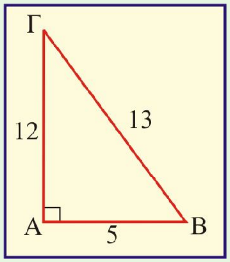
$$\frac{ημω}{συνω} = \frac{\frac{ΑΓ}{ΒΓ}}{\frac{ΑΒ}{ΒΓ}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = εφω$$

όπως φαίνεται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος της ερώτησης 1. Άρα: $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

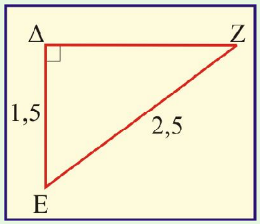
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογιστούν το ημίτονο και το συνημίτονο των οξειών γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.

α.



β.



Λύση

α. Είναι: $ημB = \frac{AΓ}{BΓ} = \frac{12}{13}$, $συνB = \frac{AB}{BΓ} = \frac{5}{13}$ και

$ημΓ = \frac{AB}{BΓ} = \frac{5}{13}$, $συνΓ = \frac{AΓ}{BΓ} = \frac{12}{13}$

β. Με Πυθαγόρειο θεώρημα θα υπολογίσουμε την ΔΖ.

$ΔZ^2 + ΔE^2 = EZ^2$ ή $ΔZ^2 = EZ^2 - ΔE^2$ ή

$ΔZ^2 = 2{,}5^2 - 1{,}5^2$ ή $ΔZ^2 = 6{,}25 - 2{,}25$ ή $ΔZ^2 = 4$ ή

$ΔZ = \sqrt{4}$ ή $ΔZ = 2$

Άρα $ημE = \frac{ΔZ}{EZ} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$, $συνE = \frac{ΔE}{EZ} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$

και $ημZ = \frac{ΔE}{EZ} = \frac{1{,}5}{2{,}5} = 0{,}6$, $συνZ = \frac{ΔZ}{EZ} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$

2 Αν ω και φ, οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, να βρείτε ποιες τιμές μπορούν να πάρουν οι παρακάτω παραστάσεις.

α. $A = 1 + ημω$ β. $B = 3 - 2συνφ$

γ. $Γ = 2 + ημω - 3συνφ$

Λύση

Γνωρίζουμε ότι $0 < ημω < 1$ και $0 < συνω < 1$.

Έτσι έχουμε:

α. $0 < ημω < 1$ και προσθέτουμε σε όλα τα μέλη της ανισότητας το 1.

Τότε: $0 + 1 < ημω + 1 < 1 + 1$

Άρα $1 < A < 2$.

β. Ισχύει $0 < συνφ < 1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας με -2, οπότε αλλάζει η φορά της ανισότητας. Δηλαδή:

$(-2)\cdot 0 > (-2)συνφ > (-2)\cdot 1$ ή $0 > -2συνφ > -2$

Προσθέτουμε στα μέλη της ανισότητας το 3 και έχουμε:

$3 + 0 > 3 - 2συνφ > 3 + (-2)$ ή $3 > B > 1$

γ. Ισχύει $0 < συνφ < 1$, πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της ανισότητας με -3, οπότε αλλάζει η φορά της ανισότητας. Δηλαδή:

$(-3)\cdot 0 > (-3)συνφ > (-3)\cdot 1$ ή $0 > -3συνφ > -3$

Επίσης ισχύει $1 > ημω > 0$, προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο τελευταίες ανισώσεις έχουμε:

$0 + 1 > ημω - 3συνφ > -3 + 0$ ή $1 > ημω - 3συνφ > -3$

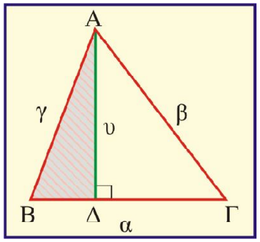
Προσθέτουμε στα μέλη της ανίσωσης το 2 και έχουμε:

$2 + 1 > 2 + ημω - 3συνφ > 2 + (-3)$ ή $3 > Γ > -1$

3 Αν στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΒΓ = α, ΑΓ = β, ΑΒ = γ και υ το ύψος ΑΔ, να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$Ε = \frac{1}{2}α \cdot γ \cdot ημΒ$$

Απόδειξη



Γνωρίζουμε ότι: $Ε = \frac{1}{2}α \cdot υ$ (1).

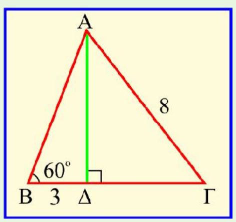
Θα υπολογίσουμε το υ και θα το αντικαταστήσουμε στη σχέση (1).

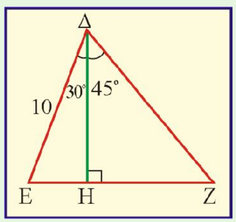
Στο τρίγωνο ΑΒΔ έχουμε:

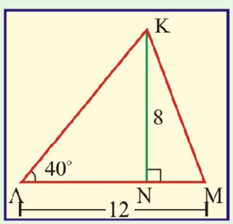
$ημΒ = \frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ ή $ημΒ = \frac{υ}{γ}$.

Άρα $υ = γ \cdot ημΒ$. Έτσι $Ε = \frac{1}{2}α \cdot (γ \cdot ημΒ)$ ή $Ε = \frac{1}{2}α \cdot γ \cdot ημΒ$

4 Να υπολογίσετε τις πλευρές και τα εμβαδά των παρακάτω οξυγώνιων τριγώνων.

α. 

β. 

γ. 

Λύση

(Στη συνέχεια παραλείπουμε τις μονάδες των μηκών και των εμβαδών, θεωρώντας ότι είναι m και m^2 αντίστοιχα).

α. Θα υπολογίσουμε την ΑΒ. Στο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$συν60° = \frac{ΒΔ}{ΑΒ} \text{ ή } 0,5 = \frac{3}{ΑΒ} \text{ ή } 0,5 \cdot ΑΒ = 3$$

$$\text{ή } ΑΒ = \frac{3}{0,5} \text{ ή } ΑΒ = 6$$

Στο ίδιο τρίγωνο μπορούμε να βρούμε το ύψος ΑΔ.

$$ημ60° = \frac{ΑΔ}{ΑΒ} \text{ ή } 0,86 = \frac{ΑΔ}{6} \text{ ή } ΑΔ = 6 \cdot 0,86$$

$$\text{ή } ΑΔ = 5,16$$

Εφόσον γνωρίζουμε τα ΑΔ και ΑΓ μπορούμε στο τρίγωνο ΑΔΓ να βρούμε με Πυθαγόρειο την ΔΓ. Δηλαδή:

$$ΔΓ^2 = ΑΓ^2 - ΑΔ^2 \text{ ή } ΔΓ^2 = 8^2 - 5,16^2 \text{ ή}$$

$$ΔΓ^2 = 64 - 26,6 \text{ ή } ΔΓ^2 = 37,4 \text{ ή } ΔΓ = 6,1$$

Άρα $ΒΓ = ΒΔ + ΔΓ = 3 + 6,1 = 9,1$ και

$$Ε = \frac{1}{2}ΒΓ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2}9,1 \cdot 5,16 = 23,478.$$

β. Στο τρίγωνο ΔΕΗ μπορούμε να υπολογίσουμε τις ΔΗ και ΕΗ:

Για την ΕΗ:

$$ημ30° = \frac{ΕΗ}{ΔΕ} \text{ ή } 0,5 = \frac{ΕΗ}{10} \text{ ή } ΕΗ = 10 \cdot 0,5 \text{ ή } ΕΗ = 5$$

$$συν30° = \frac{ΔΗ}{ΔΕ} \text{ ή } 0,86 = \frac{ΔΗ}{10} \text{ ή } ΔΗ = 10 \cdot 0,86 \text{ ή}$$

$$ΔΗ = 8,6$$

Το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΗΖ έχει οξεία γωνία ίση με 45°,

άρα είναι ισοσκελές. Έτσι: $HZ = \Delta H$ ή $HZ = 8{,}6$.
Εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο ΔΗΖ και έχουμε:

$\Delta Z^2 = \Delta H^2 + HZ^2$ ή $\Delta Z^2 = 8{,}6^2 + 8{,}6^2$

ή $\Delta Z^2 = 147{,}92$ ή $\Delta Z = 12{,}2$

Ακόμη $EZ = EH + HZ = 5 + 8{,}6 = 13{,}6$ και

$E = \frac{1}{2} EZ \cdot \Delta H = \frac{1}{2} \cdot 13{,}6 \cdot 8{,}6 = 58{,}5$.

γ. Θα υπολογίσουμε τις ΚΛ και ΛΝ στο τρίγωνο ΚΛΝ.

$\eta\mu 40^\circ = \frac{KN}{K\Lambda}$ ή $0{,}64 = \frac{8}{K\Lambda}$ ή $0{,}64 \cdot K\Lambda = 8$ ή

$K\Lambda = \frac{8}{0{,}64}$ ή $K\Lambda = 12{,}5$

Ας χρησιμοποιήσουμε την εφαπτομένη της γωνίας $\Lambda = 40^\circ$.

$\varepsilon\varphi 40^\circ = \frac{KN}{\Lambda N}$ ή $0{,}84 = \frac{8}{\Lambda N}$ ή $0{,}84 \cdot \Lambda N = 8$ ή

$\Lambda N = \frac{8}{0{,}84}$ ή $\Lambda N = 9{,}5$

Έτσι $NM = \Lambda M - \Lambda N = 12 - 9{,}5 = 2{,}5$.
Με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΚΜΝ υπολογίζουμε την ΚΜ.

Έτσι: $KM^2 = KN^2 + NM^2$ ή $KM^2 = 8^2 + 2{,}5^2$ ή
$KM^2 = 64 + 6{,}25$ ή $KM^2 = 70{,}25$ ή

$KM = 8{,}4$
Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ είναι:

$E = \frac{1}{2} \Lambda M \cdot KN = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$

5 Να υπολογίσετε την οξεία γωνία ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, αν ισχύει:

α. $2\eta\mu\omega - 1 = 0$

β. $2\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega = 0$

Λύση

α. Λύνουμε την εξίσωση με άγνωστο το ημω.

$2\eta\mu\omega - 1 = 0$ ή $2\eta\mu\omega = 1$ ή $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$

Η οξεία γωνία που έχει ημίτονο $\frac{1}{2} = 0{,}5$ είναι η γωνία των 30°. Άρα $\widehat{\omega} = 30^\circ$.

β. Εφαρμόζουμε την επιμεριστική ιδιότητα στην παράσταση και έχουμε:

$2\sigma\upsilon\nu^2\omega - \sqrt{3}\,\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ ή

$\sigma\upsilon\nu\omega\left(2\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3}\right) = 0$ ή

$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu\omega - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$ ή $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ 2\sigma\upsilon\nu\omega = \sqrt{3} \end{cases}$ ή

$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\omega = 0 \\ \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επειδή η ω είναι οξεία γωνία ορθογωνίου τριγώνου τότε θα είναι συνω > 0, άρα η συνω = 0 απορρίπτεται. Αλλά η γωνία που έχει συνημίτονο ίσο με $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1{,}73}{2} = 0{,}866$ είναι η 30°, άρα $\omega = 30^\circ$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Μπορεί το ημίτονο μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου να ισούται με την εφαπτομένη της ίδιας γωνίας; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2 Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A} = 90^\circ\right)$ είναι $ημB = συνB$. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας για το τρίγωνο;

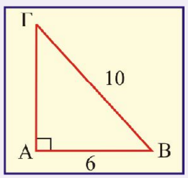
3 Αν φ και ω είναι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος. Σε κάθε περίπτωση να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

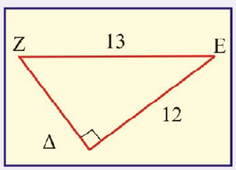
α. $ημω \cdot συνφ > 0$ **β.** $ημφ \cdot ημω < 0$ **γ.** $ημφ + συνω = 0$ **δ.** $ημφ = συνω$

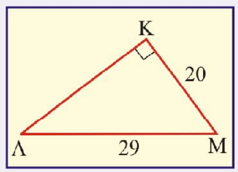
ε. $εφω \cdot συνω > 1$ **στ.** $ημω + συνω < 2$ **ζ.** $ημω \cdot \dfrac{1}{εφω} < 1$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα να υπολογίσετε το ημίτονο και συνημίτονο των οξειών γωνιών:

α.


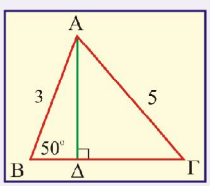
β.


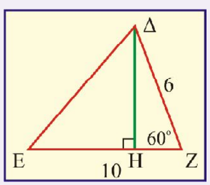
γ.


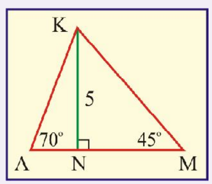
2 Αν ω, φ οξείες γωνίες ορθογωνίων τριγώνων, να βρείτε ποιες τιμές μπορούν να πάρουν οι παραστάσεις:

α. $A = 2 - ημφ$ **β.** $B = 4 + 2συνφ$ **γ.** $Γ = ημω - 2συνφ + 1$

3 Να υπολογίσετε τις πλευρές και τα εμβαδά των παρακάτω οξυγωνίων τριγώνων.

α.


β.


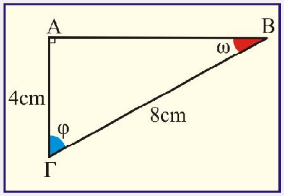
γ.


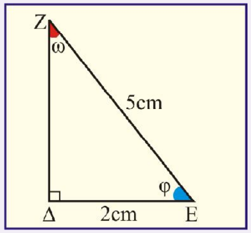
4

Αν ω είναι οξεία γωνία με $\eta\mu\omega = \frac{4}{5}$ να υπολογιστούν το συνω και η εφω.

5

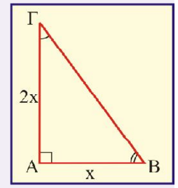
Να υπολογιστούν οι γωνίες ω και φ σε κάθε μία περίπτωση:

α. 

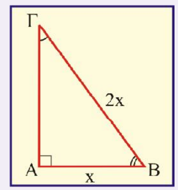
β. 

6

α. Να υπολογίσετε το ημίτονο και το συνημίτονο των οξειών γωνιών ορθογωνίου τριγώνου του οποίου η μία κάθετη πλευρά είναι διπλάσια της άλλης.



β. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο είναι η υποτείνουσά του διπλάσια μιας κάθετης πλευράς, θα είναι η απέναντι της κάθετης πλευράς οξεία γωνία ίση με 30^o; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



7

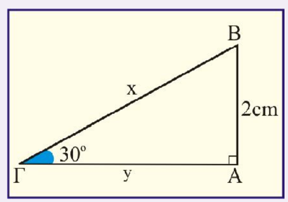
Να υπολογίσετε την οξεία γωνία ω αν ισχύει:

α. $6(\sigma\upsilon\nu\omega - 1) + 3 = 0$ β. $2\eta\mu^2\omega - \eta\mu\omega = 0$

8

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A} = 90^o)$ είναι ΒΓ = 10cm και $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Να υπολογίσετε τις κάθετες πλευρές του.

9

Να υπολογίσετε τα x και y σε κάθε μία περίπτωση: α. 

β.