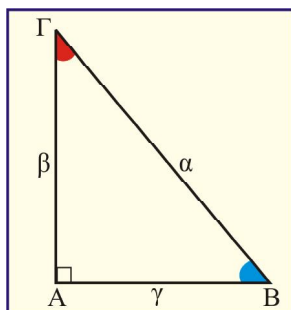


2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Ερώτηση 1

Πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου;

Απάντηση



Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **εφαπτομένη της γωνίας ω** .

$$\epsilon\phi\omega = \frac{A\Gamma}{A\text{B}} = \frac{\beta}{\gamma} \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}} \right)$$

Ερώτηση 2

Με τι ισούται η κλίση a της ευθείας με εξίσωση $y = ax$;

Απάντηση

Η κλίση a της ευθείας με εξίσωση $y = ax$ είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω , που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x' .

Ερώτηση 3

Πως μπορούμε να υπολογίσουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας;

Απάντηση

Για να υπολογίσουμε την εφαπτομένη μιας γωνίας, χρησιμοποιούμε τον πίνακα τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών $1^\circ - 89^\circ$, που βρίσκεται στο τέλος του σχολικού βιβλίου (σελ. 254) ή έναν «επιστημονικό» υπολογιστή τσέπης.

Σχόλιο:

Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

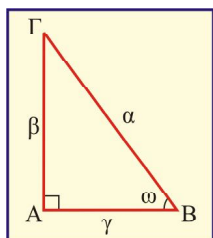
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 60° , αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 3 cm;

Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΓ = 3cm και μια οξεία γωνία $\omega = 60^\circ$. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΑΒ, χρησιμοποιώντας την εφαπτομένη της γωνίας των 60° .



$$\text{Είναι } \epsilon\phi 60^\circ = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{3}{\gamma}$$

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: $\epsilon\phi 60^\circ = 1,73$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$1,73 = \frac{3}{\gamma} \quad \text{ή} \quad \gamma = \frac{3}{1,73} = 1,734$$

οπότε έχουμε: $ΑΒ = 1,734 \text{ cm}$.

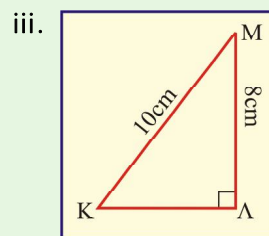
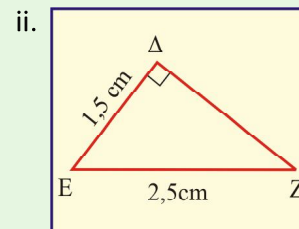
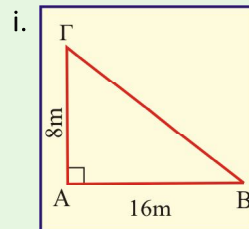
Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$ΑΒ^2 + ΑΓ^2 = ΒΓ^2 \quad \text{ή} \quad (1,734)^2 + 3^2 = ΒΓ^2 \quad \text{ή}$$

$$ΒΓ = \sqrt{3+9} = \sqrt{12}$$

2

Να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των οξείων γωνιών στα παρακάτω ορθογώνια τρίγωνα.



Λύση

i. $\epsilon\phi B = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} = \frac{8m}{16m} = 0,5$, $\epsilon\phi \Gamma = \frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{16m}{8m} = 2$

ii. Θα υπολογίσουμε πρώτα την ΔΖ με Πυθαγόρειο Θεώρημα.

$$\Delta Z^2 = E Z^2 - E \Delta^2 \quad \text{ή} \quad \Delta Z^2 = 2,5^2 - 1,5^2$$

$$\Delta Z^2 = 6,25 - 2,25 \quad \text{ή} \quad \Delta Z^2 = 4 \quad \text{ή} \quad \Delta Z = 2$$

$$\text{Έτσι } \epsilon\phi E = \frac{\Delta Z}{\text{ΕΔ}} = \frac{2\text{cm}}{1,5\text{cm}} = \frac{4}{3} \text{ και } \epsilon\phi Z = \frac{\text{ΕΔ}}{\Delta Z} = \frac{1,5\text{cm}}{2\text{cm}} = 0,75$$

iii. Και εδώ θα υπολογίσουμε με Πυθαγόρειο θεώρημα την ΚΛ. Έχουμε:

$$\text{ΚΛ}^2 = \text{ΚΜ}^2 - \text{ΜΛ}^2 \text{ ή } \text{ΚΛ}^2 = 10^2 - 8^2 \text{ ή}$$

$$\text{ΚΛ}^2 = 100 - 64 \text{ ή } \text{ΚΛ}^2 = 36 \text{ ή } \text{ΚΛ} = 6$$

$$\text{Άρα } \epsilon\phi K = \frac{8\text{cm}}{6\text{cm}} = \frac{4}{3} \text{ και } \epsilon\phi M = \frac{6\text{cm}}{8\text{cm}} = 0,75.$$



Παρατήρηση

Παρατηρήσαμε λοιπόν πως αν ζητείται η εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογώνιου τριγώνου και μας δίνεται η υποτείνουσά του τότε χρησιμοποιούμε Πυθαγόρειο Θεώρημα.

3

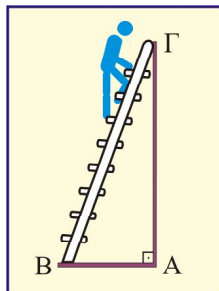
Τεχνίτης τοποθέτησε τη βάση της σκάλας σε απόσταση 1,5 m από τον κάθετο τοίχο ΑΓ και ανέβηκε σε ύψος 6m. Ποια είναι η κλίση της σκάλας;

Λύση

Δίνεται ότι $AB = 1,5\text{m}$ και $AG = 6\text{m}$.

$$\text{Έτσι: } \epsilon\phi\omega = \frac{AG}{AB} = \frac{6\text{m}}{1,5\text{m}} = 4.$$

Δηλαδή η κλίση της σκάλας είναι 400%.



4

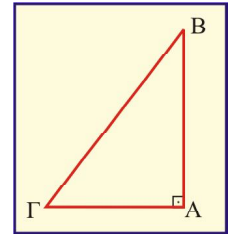
Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο οξείων γωνιών Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι αντίστροφοι αριθμοί.

Λύση

$$\epsilon\phi B = \frac{AG}{AB} \text{ και } \epsilon\phi\Gamma = \frac{AB}{AG}.$$

$$\text{Έτσι } \epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi\Gamma = \frac{AG}{AB} \cdot \frac{AB}{AG} = 1.$$

Άρα οι $\epsilon\phi B$ και $\epsilon\phi\Gamma$ είναι αντίστροφοι αριθμοί.

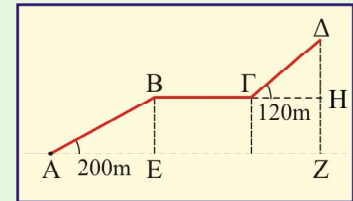


Παρατήρηση

Αντίστροφοι λέγονται δύο αριθμοί που το γινόμενό τους είναι ίσο με 1.

5

Η κλίση του ανφορικού δρόμου AB είναι 10%. Να υπολογίσετε την κλίση του δρόμου ΓΔ αν γνωρίζετε ότι το σημείο Δ βρίσκεται 44m ψηλότερα από το Α.



Λύση

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABE έχουμε:

$$\epsilon\phi A = \frac{10}{100} = 0,1 \text{ αλλά } \epsilon\phi A = \frac{BE}{AE}.$$

Έτσι: $0,1 = \frac{BE}{200}$ ή $BE = 20\text{m}$

Ισχύει ακόμα ότι $\Delta Z = 44\text{ m}$.

Άρα $\Delta H = \Delta Z - ZH = \Delta Z - BE = 44 - 20$, άρα $\Delta H = 24\text{m}$.

Στο τρίγωνο $\Gamma\Delta\text{H}$ έχουμε: $\epsilon\phi\Gamma = \frac{\Delta H}{\Gamma\text{H}} = \frac{24\text{m}}{120\text{m}} = 0,2$.

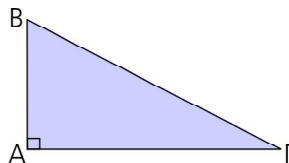
Άρα η κλίση του δρόμου $\Gamma\Delta$ είναι 20%.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει: $\epsilon\phi\hat{\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

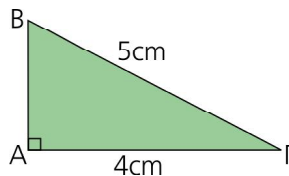


β. Η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει μια ευθεία με τον άξονα $x'x$ μας δίνει την κλίση της ευθείας αυτής

γ. Στο ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ ισχύει $\epsilon\phi A = \epsilon\phi B$

δ. Η κλίση της ευθείας $\psi = 2x$ είναι -2

2 Στο παρακάτω ορθογώνιο τρίγωνο έχουμε:



α) $A. \epsilon\phi\Gamma < \epsilon\phi B$

B. $\epsilon\phi\Gamma > \epsilon\phi B$

Γ. $\epsilon\phi\Gamma = \epsilon\phi B$

β) $A. \epsilon\phi\Gamma = \frac{3}{5}$

B. $\epsilon\phi\Gamma = \frac{3}{4}$

Γ. $\epsilon\phi B = \frac{3}{4}$

Δ. $\epsilon\phi\Gamma = \frac{4}{3}$

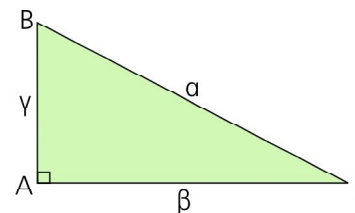
3 Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο. Να συμπληρωθούν τα κενά.

α) $\epsilon\phi\Gamma = \dots$

β) $\epsilon\phi B = \dots$

γ) $\hat{A} = \dots$

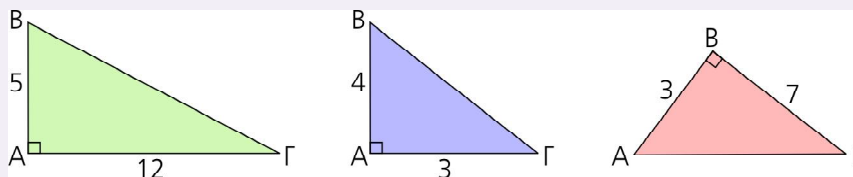
δ) $\epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi\Gamma = \dots$



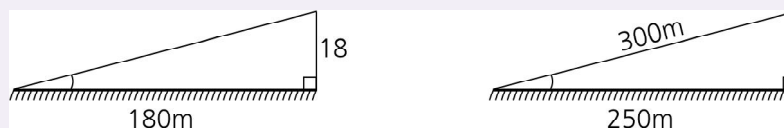
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Ποια στοιχεία μπορείτε να υπολογίσετε σε ορθογώνιο τρίγωνο με μια οξεία γωνία 70° , αν η απέναντι κάθετη πλευρά έχει μήκος 6 cm;

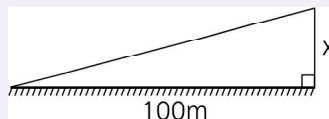
2 Να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των οξείων γωνιών των παρακάτω τριγώνων.



- 3 Να υπολογίσετε την κλίση κάθε δρόμου στα παρακάτω σχήματα



- 4 Αν η κλίση του ανηφορικού δρόμου είναι 7% να υπολογίσετε το ύψος x



- 5 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\epsilon\phi\Gamma = \frac{4}{3}$ και $AB = 40\text{cm}$.

Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου.

- 6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $AB = 10\text{cm}$ και $\epsilon\phi B = 2$. Να βρείτε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$.

- 7 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ τέτοιες ώστε $AB = \frac{1}{3}A\Gamma$. Να βρείτε τις εφαπτομένες των οξείων γωνιών του τριγώνου
- 8 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων να σημειώσετε τα σημεία $A(1,4)$ και $B(3,2)$. Να υπολογίσετε τις εφαπτόμενες των γωνιών $\omega = \hat{xOA}$ και $\varphi = \hat{xOB}$

