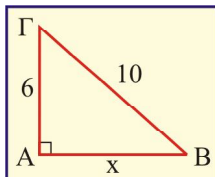


1.4 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Ερώτηση 1

- Διατυπώστε το Πυθαγόρειο θεώρημα (Π.Θ.).
- Που χρησιμεύει το Π.Θ.;
- Να υπολογίσετε την πλευρά x του ορθογωνίου τριγώνου $ABΓ$.



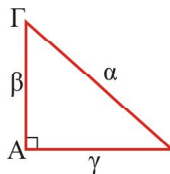
Απάντηση

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούς.

Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο $ABΓ$ με $A = 90^\circ$ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

- Το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμεύει στον υπολογισμό οποιασδήποτε πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε τις άλλες δύο πλευρές του.



- Από το Π.Θ. στο τρίγωνο $ABΓ$ έχουμε:

$$x^2 + 6^2 = 10^2 \quad \text{ή}$$

$$x^2 + 36 = 100 \quad \text{ή}$$

$$x^2 = 64 \quad \text{ή}$$

$$x = 8$$

Ερώτηση 2

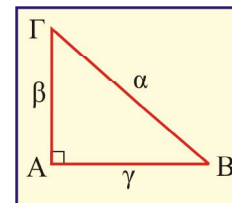
- Διατυπώστε το αντίστροφο του Π.Θ..
- Που χρησιμεύει το αντίστροφο του Π.Θ.;
- Εξετάστε αν το τρίγωνο με πλευρές 6cm, 7cm και 9cm είναι ορθογώνιο.

Απάντηση

Το αντίστροφο του Π.Θ. διατυπώνεται ως εξής:

Όταν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

Δηλαδή αν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^\circ$.



- Το αντίστροφο του Π.Θ. χρησιμεύει στο να ελέγχουμε αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή όχι, όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του.

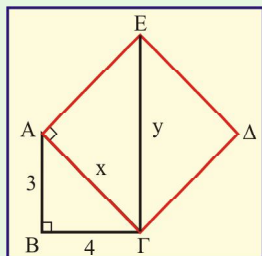
- Για να είναι ορθογώνιο θα πρέπει με βάση το αντίστροφο του Π.Θ. να ισχύει:

$$9^2 = 6^2 + 7^2 \quad \text{ή} \quad 81 = 36 + 49 \quad \text{ή} \quad 81 = 85$$

Αυτό όμως δεν ισχύει, άρα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1



Στο παραπάνω σχήμα, το ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο. Να υπολογισθούν:

- Η πλευρά x του τετραγώνου.
- Η διαγώνιος y του τετραγώνου.
- Να υπολογιστεί το εμβαδόν E του τετραγώνου.

Λύση

α. Υπολογισμός της πλευράς x

Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \text{ ή } x^2 = 9 + 16 \text{ ή } x^2 = 25 \text{ ή } x = \sqrt{25} \text{ ή } x = 5$$

β. Υπολογισμός της πλευράς y

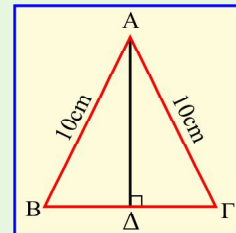
Επειδή το ΑΓΔΕ είναι τετράγωνο το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ορθογώνιο με ίσες κάθετες πλευρές $ΔΓ = ΑΕ = x = 5$.

$$\begin{aligned} \text{Αρα από το Π.Θ. έχουμε: } ΓΕ^2 &= ΑΓ^2 + ΑΕ^2 \text{ ή } y^2 = x^2 + x^2 \\ \text{ή } y^2 &= 5^2 + 5^2 \text{ ή } y^2 = 25 + 25 \text{ ή } y^2 = 50 \text{ ή } y \approx 7,07. \end{aligned}$$

γ. Υπολογισμός του εμβαδού του τετραγώνου

$$E = x^2 = 25 \text{ (από το α. ερώτημα)}$$

2



Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει περίμετρο 36 cm και μία από τις ίσες πλευρές έχει μήκος 10 cm.

Να υπολογίσετε:

- Το ύψος $ΑΔ$ του τριγώνου ΑΒΓ.
- Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

α. • Υπολογισμός του ΒΔ

Η περίμετρος του τριγώνου είναι 36 cm. Άρα:
 $ΑΒ + ΑΓ + ΒΓ = 36$ ή $10 + 10 + ΒΓ = 36$ ή $20 + ΒΓ = 36$
 ή $ΒΓ = 36 - 20$ ή $ΒΓ = 16$ cm

Επειδή το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος θα έχουμε:

$$ΒΔ = \frac{16}{2} = 8 \text{ cm}$$

• Υπολογισμός του ύψους ΑΔ.

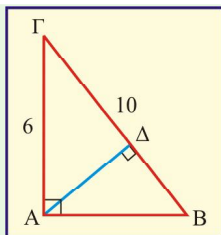
Από το Π.Θ. έχουμε στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ:

$$\begin{aligned} ΑΔ^2 + ΒΔ^2 &= ΑΒ^2 \text{ ή } ΑΔ^2 + 8^2 = 10^2 \text{ ή } ΑΔ^2 = 100 - 64 \text{ ή } \\ ΑΔ^2 &= 36 \text{ ή } ΑΔ = 6 \text{ cm} \end{aligned}$$

β. • Υπολογισμός του εμβαδού E του τριγώνου ΑΒΓ. Είναι:

$$E = \frac{\beta \cdot u}{2} = \frac{ΒΓ \cdot ΑΔ}{2} = \frac{16 \cdot 6}{2} = \frac{96}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

3



Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $B\Gamma = 10\text{cm}$ και $A\Gamma = 6\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

- Την πλευρά AB
- Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- Το ύψος AD

Λύση

α. Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ έχουμε:

$$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2 \quad \text{ή} \quad AB^2 + 6^2 = 10^2 \quad \text{ή} \quad AB^2 + 36 = 100 \quad \text{ή} \quad AB^2 = 100 - 36 \quad \text{ή} \quad AB^2 = 64 \quad \text{ή} \quad AB = \sqrt{64} \quad \text{ή} \quad AB = 8\text{cm}.$$

β. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι:

$$E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} = \frac{AB \cdot A\Gamma}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = \frac{48}{2} = 24\text{ cm}^2$$

γ. Επίσης το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι: $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$ ή

$$24 = \frac{B\Gamma \cdot AD}{2} \quad \text{ή} \quad 24 = \frac{10 \cdot AD}{2} \quad \text{ή} \quad 10 \cdot AD = 24 \cdot 2 \quad \text{ή}$$

$$10 \cdot AD = 48 \quad \text{ή} \quad AD = \frac{48}{10} \quad \text{ή} \quad AD = 4,8\text{ cm}$$

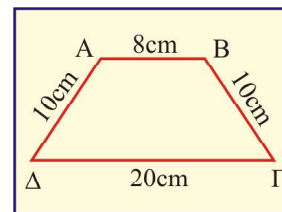
4

Το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές με

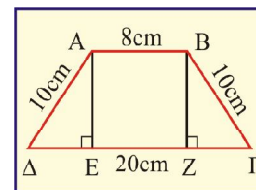
$AB = 8\text{ cm}$, $AD = B\Gamma = 10\text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 20\text{ cm}$. Να υπολογίσετε:

α. Το ύψος AE του τραπεζίου.

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου.

**Λύση**

α. Φέρνουμε τα ύψη AE και BZ .



Προφανώς από το ορθογώνιο $ABZE$ έχουμε ότι:

$$EZ = AB = 8\text{ cm}.$$

$$\text{Επομένως: } \Delta E = \Gamma Z = \frac{20 - 8}{2} = \frac{12}{2} = 6\text{cm}$$

Από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε:

$$AE^2 = A\Delta^2 - \Delta E^2 \quad \text{ή} \quad AE^2 = 10^2 - 6^2 \quad \text{ή} \quad AE^2 = 100 - 36 \quad \text{ή} \quad AE^2 = 64 \quad \text{ή} \quad AE = \sqrt{64} = 8\text{ cm}.$$

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ είναι:

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot \upsilon}{2} = \frac{(AB + \Gamma\Delta) \cdot AE}{2} = \frac{(8 + 20) \cdot 8}{2} = \frac{28 \cdot 8}{2} = 14 \cdot 8 = 112\text{ cm}^2$$

Δηλαδή $E = 112\text{ cm}^2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Χαρακτηρίστε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 90^\circ$ ισχύει $a^2 = \beta^2 - \gamma^2$.

☐

β. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 = \gamma^2 - a^2$, τότε $\hat{A} = 90^\circ$.

☐

γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές x, y, ω για τις οποίες ισχύουν συγχρόνως:

$$x^2 = y^2 + \omega^2 \quad \text{και} \quad y^2 = x^2 + \omega^2$$

☐

2 Οι παρακάτω ισότητες αναφέρονται στο διπλανό σχήμα.
Να σημειώσετε ποιες από αυτές είναι σωστές, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $x^2 = \omega^2 + y^2$

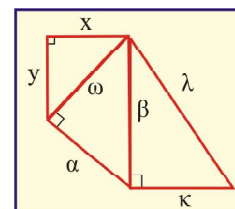
ii. $y^2 = \omega^2 - x^2$

iii. $\beta^2 = a^2 + \omega^2$

iv. $\beta^2 = x^2 + y^2 + a^2$

v. $\kappa^2 = \beta^2 - \tilde{\eta}^2$

vi. $\tilde{\eta}^2 = \kappa^2 + a^2 + y^2 + x^2$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε:

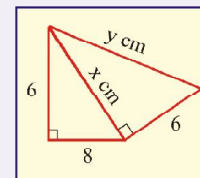
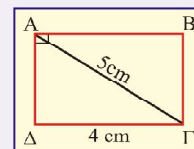
α. Το x

β. Το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά y .

2 Στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι ΑΓ = 5 cm και ΓΔ = 4 cm.
Να υπολογίσετε:

i. Την περίμετρο του ΑΒΓΔ,

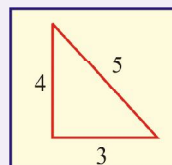
ii. Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ



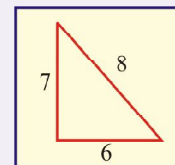
3 Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 144 cm^2 και το εμβαδόν του τετραγώνου ΒΕΖΗ είναι 169 cm^2 . Να βρείτε την πλευρά ΓΕ.

- 4 Να ελέγξετε αν τα παρακάτω τρίγωνα είναι ορθογώνια:

i.

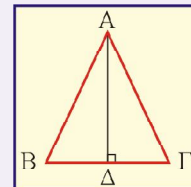


ii.

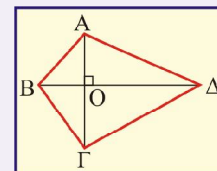


- 5 Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) η περίμετρός του είναι 54 cm και η $AB = 15\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

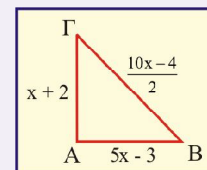
α. Το ύψος $A\Delta$. β. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. γ. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Delta$.



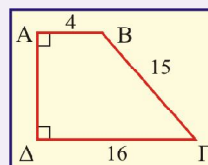
- 6 Να εξετάσετε αν ισχύει: $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$



- 7 Η περίμετρος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 30 cm. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



- 8 Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ έχουμε: $AB = 4\text{cm}$, $\Gamma\Delta = 16\text{cm}$, $B\Gamma = 15\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.



- 9 Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $AB = 15$, $A\Gamma = 13$, $B\Delta = 9$. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

