

## 4.5 Μέση τιμή - Διάμεσος

### Ερώτηση 1

Τι είναι μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων;  
Δώστε ένα παράδειγμα.

### Απάντηση

**Μέση τιμή** (ή μέσος όρος) ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι το πηλίκο του αθροίσματος των παρατηρήσεων προς το πλήθος τους.

*Άρα για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών.*

Η **μέση τιμή** είναι δυνατόν να μην ισούται με την τιμή κάποιας παρατήρησης.

### Παράδειγμα:

- α. Να βρεθούν οι μέσες μηνιαίες αποδοχές σε ευρώ, 20 εργαζομένων μιας επιχείρησης των οποίων οι αποδοχές σε ευρώ δίνονται στον διπλανό πίνακα.
- β. Να βρεθεί η μέση τιμή 5 διαδοχικών φυσικών αριθμών αν ο μεγαλύτερος είναι 20.

Αποδοχές	Συχνότητα
600	5
800	7
700	6
1100	2
<b>Σύνολα</b>	20

### Λύση

- α. Ο πιο πάνω πίνακας μας βοηθάει να βρούμε σύντομα το άθροισμα όλων των αποδοχών που είναι:
- $$5 \cdot 600 + 800 \cdot 7 + 700 \cdot 6 + 1100 \cdot 2 =$$
- $$= 3.000 + 5.600 + 4.200 + 2.200 = 15.000$$
- Άρα η μέση τιμή των αποδοχών είναι:  $\frac{15000}{20} = 750 \text{€}$
- β. Οι αριθμοί είναι: 16, 17, 18, 19, 20.

$$\text{Η μέση τιμή είναι: } \frac{16+17+18+19+20}{5} = \frac{90}{5} = 18$$

### Ερώτηση 2

Πώς ορίζεται η διάμεσος ενός συνόλου παρατηρήσεων;  
Δώστε ένα παράδειγμα.

### Απάντηση

**Διάμεσος** ενός δείγματος  $n$  παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά (από την μικρότερη στη μεγαλύτερη) είναι η **μεσαία** παρατήρηση αν το **πλήθος των παρατηρήσεων** είναι περιττό ή ο **μέσος όρος των δύο μεσαίων παρατηρήσεων** αν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι **άρτιο**.

### Παράδειγμα:

- α. Να βρεθεί η διάμεσος των πέντε πρώτων φυσικών περιττών αριθμών.
- β. Ποια είναι η διάμεσος των αριθμών 3, 5, 6, 10, 8, 11;

### Λύση

- α. Οι πρώτοι πέντε περιττοί φυσικοί αριθμοί είναι: 1, 3, 5, 7, 9, οι οποίοι είναι διαταγμένοι σε αύξουσα σειρά και το πλήθος τους είναι περιττό άρα η διάμεσος είναι ο αριθμός 5 (μεσαίος).
- β. Οι αριθμοί δεν είναι διαταγμένοι σε αύξουσα σειρά. Διατάσσοντάς τους είναι: 3, 5, 6, 8, 10, 11. Επειδή το πλήθος

$$\text{τους είναι άρτιο η διάμεσος είναι: } \frac{6+8}{2} = 7$$

Ακριβέστερα η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες

### Ερώτηση 3

Πώς βρίσκουμε την μέση τιμή όταν έχουμε ομαδοποιημένη κατανομή;

### Απάντηση

Όταν έχουμε **ομαδοποιημένη κατανομή**, για λόγους οι-

κονομίας χρόνου, βρίσκουμε τη μέση τιμή **κατά προσέγγιση** **μεν**, πολύ **πιο γρήγορα όμως**, θεωρώντας ότι όλες οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης, **συμπίπτουν** με το **κέντρο** της **κλάσης**.

Για να βρούμε τη μέση τιμή ομαδοποιημένης κατανομής:

- Βρίσκουμε τα κέντρα των κλάσεων.
- Πολλαπλασιάζουμε το κέντρο κάθε κλάσης με τη συχνότητα της κλάσης αυτής.
- Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα.
- Διαιρούμε το άθροισμα αυτό με το άθροισμα των συχνοτήτων.

Για διευκόλυνση στον υπολογισμό συμπληρώνουμε τον πίνακα συχνοτήτων με μια ακόμα στήλη στην οποία γράφουμε τα κέντρα των κλάσεων.

Ύψος σε cm	Συχνότητα
140 - 145	5
145 - 150	10
150 - 155	15
155 - 160	10
<b>Σύνολα</b>	<b>40</b>

### Παράδειγμα:

Να βρεθεί η μέση τιμή της κατανομής του διπλανού πίνακα που περιγράφει τα ύψη 40 μαθητών μιας τάξης.

### Λύση

Συμπληρώνοντας στον πίνακα την στήλη με τα κέντρα των κλάσεων έχουμε:

Ύψος σε cm	Κέντρα κλάσεων	Συχνότητα
140 - 145	142,5	5
145 - 150	147,5	10
150 - 155	152,5	15
155 - 160	157,5	10
<b>Σύνολα</b>		<b>40</b>

Οπότε η μέση τιμή είναι:

$$\frac{142,5 \cdot 5 + 147,5 \cdot 10 + 152,5 \cdot 15 + 157,5 \cdot 10}{40} =$$

$$\frac{712,5 + 1475 + 2287,5 + 1575}{40} = \frac{6050}{40} = 151,25$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Η μέση τιμή πέντε αριθμών είναι 5. Οι τρεις από αυτούς είναι οι 5, 7, 4. Να βρείτε τους άλλους δύο, αν γνωρίζετε ότι ο ένας είναι διπλάσιος από τον άλλο.

### Λύση

Αν ονομάσουμε  $x$  τον μικρότερο από τους δύο αγνώστους αριθμούς τότε ο άλλος θα είναι  $2x$ . Έχουμε:

$$\frac{x + 2x + 5 + 7 + 4}{5} = 5 \quad \text{ή} \quad \frac{3x + 16}{5} = 5 \quad \text{ή} \quad 3x + 16 = 25 \quad \text{ή}$$

$3x = 25 - 16$  ή  $3x = 9$  ή  $x = 3$ .  
Άρα οι αριθμοί είναι ο 3 και ο 6.

2

Ώρες διαβάσματος	Σχετική Συχνότητα %
0	10
1	20
2	30
3	35
4	5
	100

Ο παραπάνω πίνακας σχετικών συχνοτήτων δίνει τις ώρες που διάβασαν για ένα διαγώ-

νισμα στα μαθηματικά το προηγούμενο βράδυ οι 120 μαθητές ενός σχολείου. Να βρείτε την διάμεσο και την μέση τιμή

**Λύση**

Αν υποθέσουμε ότι  $x$  μαθητές διάβασαν μηδέν ώρες τότε:

$$\frac{x}{120} = \frac{10}{100} \quad \text{ή} \quad 100x = 10 \cdot 120 \quad \text{ή} \quad 100x = 1200 \quad \text{ή} \quad x = 12$$

Όμοια βρίσκουμε τις συχνότητες και των άλλων παρατηρήσεων και τις τοποθετούμε στον πίνακα.

Ώρες διαβάσματος	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα %
0	12	10
1	24	20
2	36	30
3	42	35
4	6	5
	120	100

Αν διατάξουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά έχουμε:

$$\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{12 \text{ φορές}}, \quad \underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{24 \text{ φορές}}, \quad \underbrace{2, 2, 2, \dots, 2}_{36 \text{ φορές}},$$

$$\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_{42 \text{ φορές}}, \quad \underbrace{4, 4, 4, \dots, 4}_{6 \text{ φορές}}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο "μεσαίες" από τις 120 παρατηρήσεις είναι η  $60^{\text{η}}$  και η  $61^{\text{η}}$  που είναι ίσες με 2 άρα η διά-

μεσος είναι:  $\frac{2+2}{2} = 2$

Η μέση τιμή είναι:

$$\frac{12 \cdot 0 + 24 \cdot 1 + 36 \cdot 2 + 42 \cdot 3 + 6 \cdot 4}{120} = \frac{246}{120} = 2,05$$

3

Σε μια "λίστα" 5 παρατηρήσεων να εξηγήσετε ότι αν όλες οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2, τότε και η μέση τιμή και η διάμεσος αυξάνεται κατά 2. Κατά την άποψή σας, η πιο πάνω ιδιότητα ισχύει μόνο όταν οι παρατηρήσεις είναι 5;

**Λύση**

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε τις παρατηρήσεις  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$

τότε έχουν μέση τιμή:  $x = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$  (1).

Αν αυξηθεί κατά 2 κάθε παρατήρηση οι παρατηρήσεις γίνονται:  $x_1 + 2, x_2 + 2, x_3 + 2, x_4 + 2, x_5 + 2$ , οπότε η νέα μέση τιμή είναι:

$$\frac{x_1 + 2 + x_2 + 2 + x_3 + 2 + x_4 + 2 + x_5 + 2}{5} =$$

$$\frac{(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + 2 + 2 + 2 + 2 + 2}{5} =$$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5} + \frac{5 \cdot 2}{5} = x + 2$$

Άρα η νέα μέση τιμή είναι ίση με την παλιά αυξημένη κατά 2. Όλες οι παρατηρήσεις έχουν αυξηθεί κατά 2 άρα και η "μεσαία" που είναι η διάμεσος.

Επομένως, η νέα διάμεσος είναι ίση με την παλιά αυξημένη κατά 2. Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι η πιο πάνω ιδιότητα ισχύει όποιο και αν είναι το πλήθος των παρατηρήσεων.

4

Τέσσερις διαδοχικοί άρτιοι φυσικοί αριθμοί έχουν μέση τιμή 5.

- α. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.  
β. Να βρείτε την διάμεσό τους.

**Λύση**

α. Έστω  $x$  ο μικρότερος από αυτούς.

Τότε:  $x, x+2, x+4, x+6$ .

Αφού έχουν μέση τιμή 5, ισχύει:

$$\frac{x+(x+2)+(x+4)+(x+6)}{4} = 5 \quad \text{ή}$$

$$x+x+2+x+4+x+6 = 5 \cdot 4 \quad \text{ή}$$

$$4x+12 = 20 \quad \text{ή} \quad 4x = 20 - 12 \quad \text{ή} \quad 4x = 8 \quad \text{ή} \quad x = 2$$

Άρα οι αριθμοί είναι οι 2, 4, 6, 8.

β. Η διάμεσος είναι:  $\frac{4+6}{2} = 5$

**5**

Το μέσο ύψος 10 καλαθοσφαιριστών μιας ομάδας είναι 204 cm. Ποιο θα είναι το μέσο ύψος της ομάδας:

- α. Αν φύγει ένας παίκτης με ύψους 200cm;  
β. Αν έρθει ένας παίκτης με ύψος 210cm;  
γ. Αν φύγει ένας παίκτης με ύψος 190cm και έρθει ένας άλλος με ύψος 200cm;

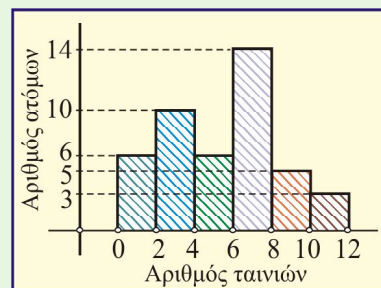
**Λύση**

Το άθροισμα όλων των ύψων είναι:  $10 \cdot 204 = 2040$  cm

α. Το μέσο ύψος θα είναι:  $\frac{2040 - 200}{9} = 204,44$  cm

β. Το μέσο ύψος θα είναι:  $\frac{2040 + 210}{11} = 204,55$  cm

γ. Το μέσο ύψος θα είναι:  $\frac{2040 - 190 + 200}{10} = 205$  cm

**6**

Το παραπάνω ιστόγραμμα συχνοτήτων δίνει τον αριθμό των ταινιών που είδαν οι μαθητές μιας τάξης κατά την διάρκεια της σχολικής χρονιάς.

- α. Πόσοι είναι οι μαθητές της τάξης;  
β. Πόσοι μαθητές είδαν 6 ταινίες και άνω;  
γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

**Λύση**

Όπως φαίνεται από το ιστόγραμμα:

α. Ο αριθμός των μαθητών είναι:

$$6 + 10 + 6 + 14 + 5 + 3 = 44 \text{ μαθητές.}$$

β. 6 ταινίες και άνω είδαν  $14 + 5 + 3 = 22$  μαθητές.

γ. Η μέση τιμή είναι:

$$\frac{1 \cdot 6 + 3 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 7 \cdot 14 + 9 \cdot 5 + 11 \cdot 3}{44} =$$

$$\frac{6 + 30 + 30 + 98 + 45 + 33}{44} = 5,5$$

Κλάσεις	Κέντρο κλάσης	Συχνότητα
0 - 2	1	6
2 - 4	3	10
4 - 6	5	6
6 - 8	7	14
8 - 10	9	5
10 - 12	11	3
<b>Σύνολο</b>		<b>44</b>

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

- 1 α. Τι είναι διάμεσος  $n$  παρατηρήσεων ενός δείγματος;  
β. Να βρεθεί η διάμεσος των αριθμών:  $0, -1, -2, 1, 3, 5$ .
- 2 α. Να χαρακτηρίσετε την παρακάτω πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).  
Η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται και μέσο όρος.   
β. Να βρεθεί η μέση τιμή των αριθμών:  $-5, -3, 0, 3, 5$ .
- 3 Να κυκλώσετε τις σωστές απαντήσεις:  
1. Το άθροισμα 40 παρατηρήσεων είναι 200. Η μέση τιμή είναι:  
Α. 800                      Β. 20                      Γ. 100                      Δ. 5  
2. Η μέση τιμή 100 παρατηρήσεων είναι 25,5. Το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι:  
Α. 2.550                      Β. 255                      Γ. 125,5                      Δ. 25.000  
3. Η μέση τιμή μιας κατανομής είναι 4 και το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι 80. Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι:  
Α. 20                      Β. 360                      Γ.  $\frac{4}{80}$                       Δ. 12

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος:  
α. Τεσσάρων διαδοχικών περιττών με πρώτο τον 15.  
β. Πέντε διαδοχικών άρτιων με τελευταίο τον 18.
- 2 Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι 10. Αν οι τρεις από αυτούς είναι οι: 5, 12, 15, να βρείτε τους άλλους.
- 3 Πέντε διαδοχικοί περιττοί φυσικοί αριθμοί έχουν μέση τιμή 13.

α. Να βρεθούν οι αριθμοί αυτοί.                      β. Να βρείτε την διάμεσό τους.

**4** Οκτώ εργαζόμενοι μιας επιχείρησης έχουν μέσο εβδομαδιαίο μισθό 125 € και ο μέσος μισθός των υπόλοιπων είναι 145 €. Αν ο μέσος μισθός όλων είναι 137 € πόσοι είναι οι εργαζόμενοι;

**5** Η βαθμολογία 30 μαθητών στο μάθημα της έκθεσης κυμαίνεται από 10 μέχρι 20 (κανένας δεν έγραψε κάτω από τη βάση). Γνωρίζουμε επίσης ότι πέντε μαθητές έχουν βαθμό κάτω του 12, δώδεκα μαθητές έχουν βαθμό κάτω του 14, έξι μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δέκα μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

α. Να παραστήσετε τα δεδομένα σε ένα πίνακα συχνοτήτων.

β. Να υπολογίσετε την μέση τιμή.

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων.

δ. Τι ποσοστό μαθητών έγραψε 14 και πάνω;

**6** Στον διπλανό πίνακα δίνονται τέσσερις παρατηρήσεις με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Η τρίτη συχνότητα όμως χάθηκε! Μπορείτε να την βρείτε αν γνωρίζετε ότι η μέση τιμή είναι 11,8;

Παρατηρήσεις	Συχνότητα
10	2
11	2
12	x
13	4

**7** Το μέσο ύψος 20 μαθητών μιας τάξης είναι 160 cm. Ποιο είναι το μέσο ύψος της τάξης:

α. Αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 141 cm;

β. Αν έρθει ένας μαθητής με ύψος 149,5 cm;

γ. Αν φύγει ένας μαθητής με ύψος 160 cm και έρθει ένας με ύψος 170 cm;

**8** Μια βιοτεχνία απασχολεί 4 υπαλλήλους στο τμήμα Α με μέσο μισθό (μηνιαίο) 750€, 5 υπαλλήλους στο τμήμα Β με μέσο μισθό 900€ και 6 υπαλλήλους στο τμήμα Γ με μέσο μισθό 1.000€. Ποιος είναι ο μέσος μισθός όλων των υπαλλήλων;

**9** Η μέση τιμή 40 παρατηρήσεων είναι 20. Αν από αυτές οι 7 μειωθούν κατά 2 και οι 9 αυξηθούν κατά 6 να βρεθεί η νέα μέση τιμή.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ****ΘΕΜΑ 1**

- α. Τι είναι διάμεσος  $n$  παρατηρήσεων ενός δείγματος;  
β. Να βρεθεί η διάμεσος των αριθμών:  $-1, -2, 1, 3, 0, -3, 2$ .

**ΘΕΜΑ 2**

- α. Να χαρακτηρίσετε Σωστή ή Λάθος την παρακάτω πρόταση:  
Η μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων λέγεται και μέσο όρος.  
β. Να βρεθεί η μέση τιμή των αριθμών:  $1, 2, 3, 7, 9, -7, -2, -3, -1$ .

**ΘΕΜΑ 3**

30 μανιώδεις καπνιστές καπνίζουν ημερησίως κατά μέσο όρο τους πιο κάτω αριθμούς τσιγάρων:

20 22 25 26 27 21 22 23 27 30 32 34 20 25 20

20 24 30 30 28 31 24 23 25 23 25 25 24 21 33

- α. Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε κλάσεις πλάτους 5 και μετά σε κλάσεις πλάτους 3.  
β. Να βρείτε και στις δύο περιπτώσεις την μέση τιμή και να την συγκρίνετε με την πραγματική μέση τιμή. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

**ΘΕΜΑ 4**

Η μέση ηλικία των 10 κοριτσιών ενός τμήματος είναι 17 και των 10 αγοριών 17,2. Να βρεθεί η ηλικία όλων των μαθητών.

**ΘΕΜΑ 5**

Οι 12 παίκτες μιας ομάδας μπάσκετ έχουν τις πιο κάτω ηλικίες:

20 23 24 27 30 22

30 25 30 31 25 25

- α. Μια ομάδα που ο μέσος όρος ηλικιών των παικτών της είναι τα 28 έτη, θεωρείται “γερασμένη” και χρειάζεται ανανέωση. Σε πόσα χρόνια θα χρειαστεί ανανέωση η πιο πάνω ομάδα;  
β. Αν κατά την ανανέωση, φύγουν όσοι έχουν ηλικία μεγαλύτερη από 28 έτη και έρθουν στη θέση του καθενός από ένας παίκτης ηλικίας 22 ετών, ποιος είναι ο νέος μέσος όρος των ηλικιών της ομάδας;

