

3.5 Η συνάρτηση $y = \frac{a}{x}$ - Υπερβολή

Ερώτηση 1

Πότε δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα;

Απάντηση

Δύο ποσά ονομάζονται **αντιστρόφως ανάλογα**, όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με ένα αριθμό, διαιρούνται οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού με τον ίδιο αριθμό.

Ερώτηση 2

Τι γνωρίζετε για το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών των αντιστρόφως αναλογων ποσών;

Απάντηση

Το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών δύο αντίστροφων αναλόγων ποσών είναι πάντα σταθερό.

Ερώτηση 3

Να αναφέρετε ποια σχέση γνωρίζετε να συνδέει τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά.

Απάντηση

Αν δύο ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε η ισότητα που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές των ποσών είναι η

$y = \frac{a}{x}$, όπου a είναι ένας σταθερός αριθμός. Πρέπει να α-

ναφέρουμε ότι το x δεν μπορεί να πάρει την τιμή $x = 0$.

Ερώτηση 4

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $y = \frac{a}{x}$.

Απάντηση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$, όπου $a \neq 0$

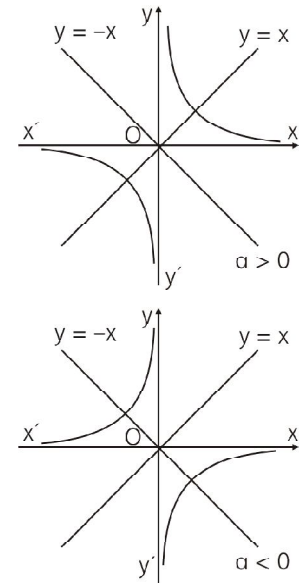
λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται από **δύο κλάδους** που βρίσκονται:

- Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a > 0$.

- Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν $a < 0$.

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y = x$ και $y = -x$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να φτιάξετε τον πίνακα τιμών της συνάρτησης $y = \frac{1}{x}$ για τις τιμές 1, 2, 3, 4, 5. Τι παρατηρείτε;

Λύση

Ο πίνακας τιμών της συνάρτησης είναι ο εξής:

x	1	2	3	4	5
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$

Βλέπουμε ότι όσο μεγαλώνουν οι τιμές του x, τόσο μικραίνουν οι τιμές του y.

2

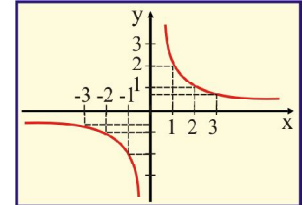
Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της $y = \frac{2}{x}$.

Λύση

Φτιάχνουμε πρώτα ένα πίνακα τιμών για κάποιες τιμές του x διαφορετικές του μηδενός

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$-\frac{2}{3}$	-1	-2	2	1	$\frac{2}{3}$

Βρίσκουμε τα 6 σημεία του επιπέδου από τα οποία διέρχεται η γραφική παράσταση της $y = \frac{2}{x}$ και τα ενώνουμε. Επεκτείνουμε την καμπύλη και έχουμε την γραφική παράσταση.



3

Μελετώντας τον παρακάτω πίνακα τιμών να απαντήσετε αν τα ποσά x και y είναι μεταξύ τους αντιστρόφως ανάλογα.

x	5	10	20	25
y	20	10	5	4

Λύση

Αν αρχίσουμε και πολλαπλασιάζουμε μεταξύ τους τις αντίστοιχες τιμές x και y βλέπουμε ότι το αποτέλεσμα των πολλαπλασιασμών είναι πάντα 100. Άρα τα δύο ποσά έχουν σταθερό γινόμενο. Αυτό σημαίνει ότι τα ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

α) Το γινόμενο των τιμών δύο αντιστρόφως ανάλογων ποσών είναι σταθερό

β) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = -\frac{5}{x}$ περνάει από το σημείο (1,-5)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \frac{2}{x}$ βρίσκεται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο

δ) Η υπερβολή δεν έχει άξονα συμμετρίας

2 Το σημείο (1,3) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης

A. $\psi = -\frac{3}{x}$

B. $\psi = -\frac{1}{x}$

Γ. $\psi = \frac{1}{x}$

Δ. $\psi = \frac{3}{x}$

3 Ποια γραφική παράσταση από τις παρακάτω συναρτήσεις βρίσκεται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο

A. $\psi = \frac{2}{x}$

B. $\psi = \frac{3}{x}$

Γ. $\psi = -\frac{1}{x}$

Δ. $\psi = \frac{1}{x}$

4 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $\psi = \frac{1}{x}$ δεν διέρχεται από το σημείο

A. (1,1)

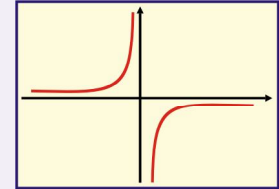
B. (2, 1/2)

Γ. (-3, 1/3)

Δ. (-2, $-\frac{1}{2}$)

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

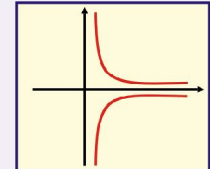
- 1** Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$. Ποιο είναι το πρόσημο του a ;



- 2** Έστω η συνάρτηση $y = \frac{1}{2x}$. Να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών της που ακολουθεί. Τι είναι μεταξύ τους τα ποσά x και y ; Να κάνετε γραφική παράσταση της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	1	2	3	4	5	6
y									

- 3** Να απαντήσετε αν η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος είναι υπερβολή. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



- 4** Ένα έργο τελειώνει με την βοήθεια 10 εργατών μέσα σε ένα μήνα (30 μέρες). Για το ίδιο έργο πόσος χρόνος θα χρειαστεί για να τελειώσει αν εργαστούν 20 εργάτες.
- 5** Σε μία κατασκήνωση όταν αυτή φιλοξενεί 100 παιδιά τα τρόφιμα αρκούν για 20 μέρες. Σε πόσες μέρες θα τελειώσουν τα τρόφιμα αν φιλοξενηθούν 75 παιδιά;

- 6** Αν $y = x$ και $z = \frac{1}{x}$ να συμπληρώσετε τον πίνακα τιμών που ακολουθεί. Τι καταλαβαίνετε για τις γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων; Έχουν κοινά σημεία; Να κατασκευάσετε σε ένα σύστημα αξόνων και τις δύο γραφικές παραστάσεις.

x	-2	-1	1	2
y				
z				

- 7** Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{3\eta + 2}{x}$ διέρχεται από το σημείο $A\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ να βρεθεί η τιμή του η .

- 8** Να γίνουν στο ίδιο σύστημα αξόνων οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{2}{x}, \quad y = \frac{3}{x}.$$

Τι παρατηρείτε;

9

α	4	2		16	1,5
β	6		8		

Τα ποσά α , β του παραπάνω πίνακα είναι αντιστρόφως ανάλογα.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

β) Να εκφράσετε το α συναρτήσει του β .

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- α. Πότε δύο ποσά ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα;
- β. Ποια μαθηματική σχέση τα συνδέει;
- γ. Τι γνωρίζετε για το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών τους;

ΘΕΜΑ 2

- α. Να κάνετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{a}{x}$ για $a > 0$ και για $a < 0$. Πως ονομάζεται αυτή η γραφική παράσταση;
- β. Ποια τιμή δεν μπορεί να πάρει το x ;

ΘΕΜΑ 3

Στα Ναυπηγεία της Ελευσίνας επισκευάστηκε ένα πιστό αντίγραφο της Αθηναϊκής Τριήρους. Ο κυβερνήτης αυτής υπολόγισε ότι έχοντας 100 κωπηλάτες μπορεί να καλύψει την απόσταση Πειραιάς - Σαλαμίνα σε 1 ώρα. Να υπολογίσετε πόσους κωπηλάτες πρέπει να έχει για να καλύψει την ίδια απόσταση σε 45 λεπτά γνωρίζοντας ότι ο χρόνος ταξιδιού και ο αριθμός κωπηλατών είναι ποσά αντιστρόφως ανάλογα. Αν γνωρίζετε ότι η συγκεκριμένη Τριήρης έχει θέσεις για 150 κωπηλάτες μπορεί να διανύσει την απόσταση Πειραιάς - Σαλαμίνα σε 30 λεπτά;

ΘΕΜΑ 4

Να κατασκευάσετε τους πίνακες τιμών και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = \frac{3}{x}$ και

$$y = \frac{-6}{x}.$$

Στους πίνακες τιμών να διαλέξετε μόνοι σας τιμές για το x (θετικούς και αρνητικούς).