

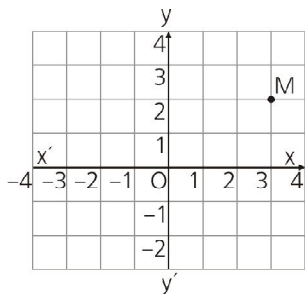
3.2 Καρτεσιανές συντεταγμένες - Γραφική παράσταση συνάρτησης

Ερώτηση 1

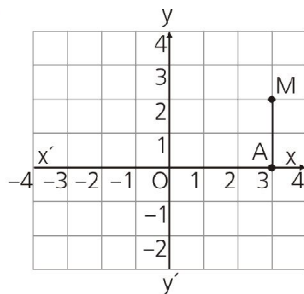
Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου;

Απάντηση

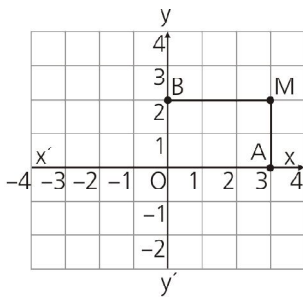
Για να προσδιορίσουμε τη θέση οποιουδήποτε σημείου του επιπέδου, κάνουμε τα εξής:



Σχεδιάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$, με κοινή αρχή O και ίδιες μονάδες μέτρησης καθώς και ένα σημείο M .



Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $y'y$ που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο A . Στο σχήμα μας το A αντιστοιχεί στον αριθμό 3 του άξονα $x'x$.



Από το M φέρνουμε παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B . Στο σχήμα μας το B αντιστοιχεί στον αριθμό 2 του άξονα $y'y$.

Το σημείο M αντιστοιχεί στο ζεύγος των αριθμών $(3, 2)$ και συμβολίζεται $M(3, 2)$. Ο πρώτος από αυτούς τους αριθμούς λέγεται **τετμημένη** του σημείου M και ο δεύτερος λέγεται **τεταγμένη** του σημείου M .

Η τετμημένη και η τεταγμένη του M λέγονται **συντεταγμένες** του σημείου M .



Παρατήρηση

- Κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα μόνο ζεύγος συντεταγμένων και αντίστροφα, κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί σε ένα μόνο σημείο του επιπέδου.
- Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι οι άξονες $x'x$ και $y'y$ αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων** ή απλώς **σύστημα αξόνων**.
- Το σχήμα του οποίου οι κάθετοι άξονες έχουν μονάδες μέτρησης με ίδιο μήκος λέγεται **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.
- Το σύστημα των αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε τέσσερα μέρη που λέγονται **τεταρτημόρια**. Στο διπλανό σχήμα σημειώνονται τα πρόσημα της τετμημένης και της τεταγμένης σε κάθε τεταρτημόριο.

		y'		
	2° τεταρτημόριο		1° τεταρτημόριο	
	$(-, +)$		$(+, +)$	
x'				x
	3° τεταρτημόριο		4° τεταρτημόριο	
	$(-, -)$		$(+, -)$	
		y		

Ερώτηση 2

Τι ονομάζεται γραφική παράσταση συνάρτησης;

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x . Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες (x, y) .

Σχόλιο:

- Ένα σημείο $M(x,y)$ βρίσκεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης, αν οι συντεταγμένες του ικανοποιούν τον τύπο της συνάρτησης.
- Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου $M(x,y)$ επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης, τότε το M βρίσκεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης.
- Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα $x'x$ έχουν τεταγμένη 0.
- Τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης με τον άξονα $y'y$ έχουν τεταγμένη 0.

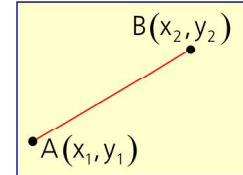
Ερώτηση 3

Πως ορίζεται η απόσταση μεταξύ δύο σημείων;

Απάντηση

Έστω δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$
Τότε η απόσταση των σημείων A, B είναι:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

**Ερώτηση 4**

Πότε δύο σημεία λέγονται συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, πότε ως προς τον άξονα $y'y$ και πότε ως προς την αρχή των αξόνων.

Απάντηση

- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$ όταν έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετη τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$ όταν έχουν αντίθετη τεταγμένη και ίδια τεταγμένη.
- Δύο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων αν έχουν αντίθετες συντεταγμένες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Αν $a > 0$ και $\beta < 0$, να βρείτε σε ποιο τεταρτημόριο βρίσκονται τα σημεία:

$A(a, \beta)$, $B(-2a, 3\beta)$, $\Gamma(a+7, \beta-5)$,

$\Delta(-3a-1, -5\beta+6)$, $E(-a^2-3, (\beta-4)^2)$

Λύση

- Επειδή $a > 0$ και $\beta < 0$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο $A(a, \beta)$ βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.

- Επειδή $a > 0$ άρα $-2a < 0$ και $\beta < 0$ άρα $3\beta < 0$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο $B(-2a, 3\beta)$ βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο.
- Επειδή $a > 0$ άρα $a+7 > 0$ και $\beta < 0$ άρα $\beta-5 < 0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο $\Gamma(a+7, \beta-5)$ βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.
- Επειδή $a > 0$ άρα $-3a-1 < 0$ και $\beta < 0$ άρα $-5\beta+6 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο $\Delta(-3a-1, -5\beta+6)$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.
- Επειδή $-a^2-3 < 0$, $(\beta-4)^2 > 0$, συμπεραίνουμε ότι το σημείο $E(-a^2-3, (\beta-4)^2)$ βρίσκεται στο 2^ο τεταρτημόριο.

2

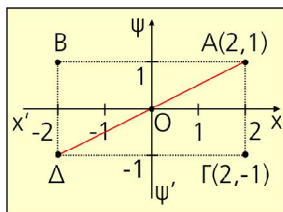
Δίνεται το σημείο $A(2,1)$. Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του A ως προς:

- τον άξονα $\psi'\psi$
- τον άξονα $x'x$
- την αρχή των αξόνων

Λύση

Παίρνουμε κάθετες από το A στους άξονες $x'x$ και $\psi'\psi$ και τις προεκτείνουμε κατά ίσα τμήματα.

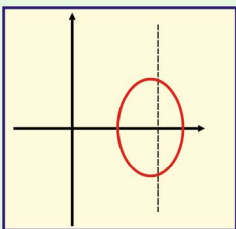
- Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $\psi'\psi$ είναι το $B(-2, 1)$.
- Το συμμετρικό του A ως προς τον άξονα $x'x$ είναι το $\Gamma(2, -1)$
- Ενώνουμε το A με το O και προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα. Το σημείο $\Delta(-2, -1)$ είναι το συμμετρικό του A ως προς το O .



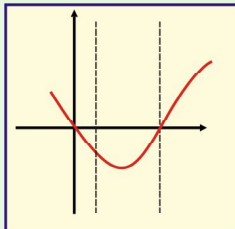
Να απαντήσετε και να δικαιολογήσετε ποιες από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις είναι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων:

3

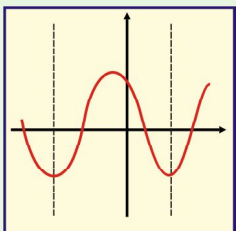
1.



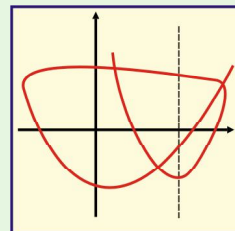
2.



3.



4.

**Λύση**

Γνωρίζουμε ότι σε μια συνάρτηση για κάθε τιμή του x αντιστοιχεί μια και μόνη τιμή του y .

Αν μια καμπύλη είναι γραφική παράσταση συνάρτησης δεν μπορούμε να φέρουμε παράλληλη ευθεία με τον yy' που να τέμνει την καμπύλη σε δύο ή περισσότερα σημεία. Στην συγκεκριμένη άσκηση παρατηρούμε ότι:

- Μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον yy' που να τέμνει την γραφική παράσταση σε δύο της σημεία. Άρα δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Δεν μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον yy' που να τέμνει την γραφική παράσταση σε δύο σημεία. Άρα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Δεν μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον yy' που να τέμνει την γραφική παράσταση σε δύο σημεία. Άρα είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.
- Μπορούμε να φέρουμε ευθεία παράλληλη με τον yy' που να τέμνει την γραφική παράσταση σε δύο της σημεία. Άρα δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να συμπληρώσετε τον πίνακα, όπως φαίνεται στο παράδειγμα της 1ης γραμμής.

Σημείο Α	Συμμετρικό του Α ως προς τον $x'x$	Συμμετρικό του Α ως προς τον $y'y$	Συμμετρικό του Α ως προς το Ο
(-5,8)	(-5, -8)	(5, 8)	(5, -8)
(5, 8)			
(-5, -8)			
(5, -8)			

2 Να χαρακτηρίσετε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ).

- Το σημείο $M(-1,3)$ έχει τεταγμένη -1 και τεταγμένη 3 .
- Ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο.
- Αν το σημείο $M(a,b)$ ανήκει στον άξονα $y'y$, τότε το σημείο M έχει τεταγμένη 0 .
- Τα σημεία $A(1,-2)$, $B(1,2)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$.
- Η απόσταση των σημείων $A(2,4)$ και $B(3,5)$ είναι 1 .

3 Να αντιστοιχίσετε τα σημεία της στήλης Α με τα τεταρτημόρια της στήλης Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α) (1,3) •	• 1) 1ο
β) (1,-3) •	• 2) 3ο
γ) (-1,3) •	• 3) 4ο
δ) (-1,-3) •	• 4) 2ο

- 9 Να προσδιορίσετε το η , εάν γνωρίζετε ότι η γραφική παράσταση της $y = (8\eta + 1)x + 15$ διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.
- 10 Να προσδιορίσετε τα α και β αν ξέρετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x + \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(1,-2)$.
- 11 Να εξετάσετε ποια από τα ακόλουθα σημεία ανήκουν την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 2x^2 - 3$.
 $A(1,-1)$, $B = (2,5)$, $\Gamma(0,7)$, $\Delta(-3,11)$
- 12 α. Αν το σημείο $A(-1,5)$ βρίσκεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \alpha x^2 + 3$, να βρείτε την τιμή του α .
β. Να βρεθεί η τιμή του η , ώστε το σημείο το σημείο $B(\eta - 1, \eta + 3)$ να βρίσκεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 5x + 4$.
- 13 Να φτιάξετε τον πίνακα τιμών των συναρτήσεων $y = \frac{1}{2}x^2$ και $z = x^2 - 1$ δίνοντας στην μεταβλητή x τις ακέραιες τιμές από -4 έως 4 και έπειτα να χαράξετε τα γραφήματά τους.
- 14 Δίνονται τα σημεία: $A(0,3)$, $B(4,0)$, $\Gamma(-4,0)$, $\Delta(-2,0)$, $E(1,4)$, $Z(9,-2)$
i) Να εξεταστεί το είδος των τριγώνων $AB\Gamma$, ΔEZ .
ii) Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν των τριγώνων $AB\Gamma$, ΔEZ .
iii) Ποιες είναι οι κορυφές του τριγώνου $A'B'\Gamma'$ που είναι συμμετρικό του $AB\Gamma$ ως προς τον άξονα $y'y$;
iv) Ποιες είναι οι κορυφές του τριγώνου $\Delta'E'Z'$ που είναι συμμετρικό του ΔEZ ως προς την αρχή O των αξόνων;

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

- α. Τι ονομάζουμε συνάρτηση;
- β. Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης;
- γ. Για κάθε τιμή του x πόσες τιμές του y παίρνουμε από μία συνάρτηση;

ΘΕΜΑ 2

Βλέποντας μία καμπύλη πως μπορούμε να καταλάβουμε ότι αυτή είναι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. Να ζωγραφίσετε δύο γραφήματα, όπου το ένα να αποτελεί γράφημα συνάρτησης και το άλλο όχι.

ΘΕΜΑ 3

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax + \beta$ είναι ευθεία γραμμή και διέρχεται από τα σημεία $A(0,5)$ και $B(1,4)$ να υπολογίσετε τα a και β και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε.

ΘΕΜΑ 4

Αν γνωρίζετε ότι $y = \frac{x-3}{4}$ και $z = x^3 - x + 2$ να συμπληρώσετε τον διπλανό πίνακα.

x	0	1	2	3
y				
z				

ΘΕΜΑ 5

1. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y = 3x$ και $y = -2x$ διέρχονται και οι δύο από το σημείο $O(0,0)$.
2. Να βρείτε τις τιμές του x , ώστε
 - α) το σημείο $A(2x - 4, 5 - x)$ να βρίσκεται στο 1ο τεταρτημόριο.
 - β) το σημείο $B(2x - 4, x + 1)$ να βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

