

2.2 Άρρητοι αριθμοί - Πραγματικοί αριθμοί

Ερώτηση 1

Ποιοι αριθμοί ονομάζονται άρρητοι αριθμοί;

Απάντηση

Άρρητοι αριθμοί ονομάζονται οι αριθμοί που δεν είναι ρητοί, αφού δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα. Δηλαδή οι αριθμοί που δεν μπορούν να μετατραπούν σε δεκαδικούς ή περιοδικούς δεκαδικούς.

Σχόλιο:

Οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά. Οι άρρητοι που γνωρίζουμε μέχρι τώρα είναι οι τετραγωνικές ρίζες αριθμών που δεν είναι τετράγωνα άλλων αριθμών. Επίσης άρρητος είναι ο γνωστός μας αριθμός $\pi \approx 3,14$.

π.χ. ο $\sqrt{7}$ είναι άρρητος, διότι το 7 δεν είναι τετράγωνο άλλου αριθμού.

Ερώτηση 2

Να αναφέρετε τα σύνολα αριθμών που έχετε συναντήσει.

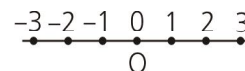
Απάντηση

• Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ..., οι οποίοι παριστάνονται στην παρακάτω ευθεία με σημεία.

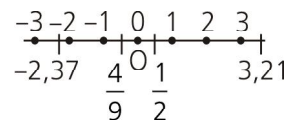
Στην αρχή 0 έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).



- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται επίσης με σημεία. Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής 0 τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.



- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.



- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνον από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για το λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να υπολογίσετε τις τιμές τους:

1

$$A = 2\sqrt{2} - 5\sqrt{6} - 7\sqrt{2} + 3\sqrt{6} - 4\sqrt{2} + 8\sqrt{6},$$

$$B = 3(\sqrt{11} - \sqrt{3}) - 2(3\sqrt{11} + 5\sqrt{3}) \quad (\text{Δίνονται:}$$

$$\sqrt{3} \approx 1,73, \sqrt{2} \approx 1,41, \sqrt{6} \approx 2,45, \sqrt{11} \approx 3,32)$$

Λύση

$$A = \sqrt{2}(2 - 7 - 4) + \sqrt{6}(-5 + 3 + 8)$$

$$A = \sqrt{2} \cdot (-9) + \sqrt{6} \cdot 6$$

$$A \approx 1,41 \cdot (-9) + 2,45 \cdot 6$$

$$A = -12,69 + 14,7$$

$$A = 2,01$$

$$B = 3\sqrt{11} - 3\sqrt{3} - 6\sqrt{11} - 10\sqrt{3}$$

$$B = \sqrt{11}(3 - 6) + \sqrt{3}(-3 - 10)$$

$$B = \sqrt{11}(-3) + \sqrt{3}(-13)$$

$$B \approx 3,32(-3) + 1,73(-13)$$

$$B = -9,96 - 22,49$$

$$B = -32,45$$

2

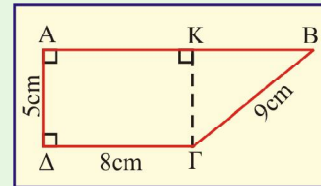
Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύουν: ΑΔ=5cm, ΓΔ=8cm, ΒΓ = 9cm.

Να υπολογίσετε:

α. Την ΑΒ.

β. Το εμβαδόν του τραpezίου.

(Δίνεται: $\sqrt{56} \approx 7,5$)



Λύση

α. Στο ορθογώνιο ΑΔΓΚ ισχύει: ΓΚ = ΑΔ = 5cm

Θα υπολογίσουμε την πλευρά ΚΒ του ορθογωνίου τριγώνου ΓΚΒ.

Από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΚΒΓ έχουμε:

$$KB^2 = BG^2 - GK^2 \quad \text{ή}$$

$$KB^2 = 9^2 - 5^2 \quad \text{ή}$$

$$KB^2 = 81 - 25 \quad \text{ή}$$

$$KB^2 = 56 \quad \text{ή}$$

$$KB = \sqrt{56} \approx 7,5$$

$$\text{Άρα: } AB = AK + KB = 8 + 7,5 = 15,5\text{cm}$$

β. Το εμβαδόν Ε του τραpezίου είναι:

$$E = \frac{(\beta + B) \cdot u}{2} = \frac{(\Gamma\Delta + AB) \cdot A\Delta}{2} = \frac{(8 + 15,5) \cdot 5}{2} =$$

$$\frac{23,5 \cdot 5}{2} = 58,75\text{cm}^2$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Αν τοποθετήσουμε τους αριθμούς στην ευθεία των πραγματικών, να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι σωστές και ποιες λανθασμένες.

Σωστό Λάθος

α. $6 < \sqrt{6,5} < 7$

β. $1,8 < \sqrt{2} < 1,9$

γ. $3 < \sqrt{15} < 9$

Σωστό Λάθος

δ. $20 < \sqrt{21} < 22$

ε. $1,3 < \sqrt{3} < 1,4$

στ. $6 < \sqrt{7} < 8$

2

Στον άξονα των πραγματικών αριθμών έχουμε τοποθετήσει τα σημεία Α, Β, Γ, Δ, Ε και Ζ. Στις παρακάτω προτάσεις να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

α. Ο αριθμός $\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο

A E Γ Δ

β. Ο αριθμός $\sqrt{7}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο

Δ Γ Ε Δ

γ. Ο αριθμός $-\sqrt{5}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο

B Γ A Δ

δ. Ο αριθμός $-\sqrt{6}$ πρέπει να τοποθετηθεί κοντά στο σημείο

E Δ B A

3

Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με τη λύση της στη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α) $x^2 = -9$	1. $x = \sqrt{5}$ ή $x = -\sqrt{5}$
β) $x^2 = 9$	2. $x = 4$ ή $x = -4$
γ) $3x^2 = 48$	3. Αδύνατη
δ) $x^2 = 5$	4. $x = 3$ ή $x = -3$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Δίνονται οι αριθμοί: $-\frac{3}{5}$, 7, $\sqrt{9}$, $\sqrt{10}$, -4, $-\sqrt{25}$, $-\sqrt{3}$

Να γράψετε ποιοι από αυτούς είναι:

- i. φυσικοί, ii. ακέραιοι, iii. ρητοί
iv. άρρητοι, v. πραγματικοί αριθμοί

2

Να συγκρίνετε τις παραστάσεις:

α. $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9}$ και $\sqrt{4 \cdot 9}$ β. $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$ και $\sqrt{\frac{4}{9}}$ γ. $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ και $\sqrt{4+9}$

Τι συμπέρασμα βγάξετε;

3

Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

i. $\sqrt{10+3} = \dots$, $\sqrt{10} + \sqrt{3} = \dots$

ii. $\sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = \dots$, $\sqrt{9 \cdot 4} = \dots$

iii. $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \dots$, $\sqrt{\frac{25}{16}} = \dots$

4

Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 18cm^2 . Να βρείτε με προσέγγιση εκατοστού το μήκος της πλευράς του.

5

Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$$-5, \quad -3,92, \quad \frac{8}{16}, \quad -\sqrt{12}, \quad 4,28, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 2$$

6

Να βρείτε το ύψος και το εμβαδόν ισοπλευρού τριγώνου με πλευρά $a = 4\text{cm}$.

7

Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση $A = 2(\sqrt{3} - 3\sqrt{5}) - 7(-\sqrt{5} + 2\sqrt{3}) - 0,5(4\sqrt{3} - 10\sqrt{5})$

8

Να λύθούν οι εξισώσεις **α)** $x^2 = 25$ **β)** $3x^2 - 6 = x^2 + 8$ **γ)** $2x^2 = -3x^2 - 5$

9

Να μετατραπούν τα ακόλουθα κλάσματα σε ισοδυναμία με ρητό παρονομαστή $\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{6}{\sqrt{7}}$

10

Ποιοι από τους ακόλουθους αριθμούς είναι ρητοί και ποιοι άρρητοι $\sqrt{51}, \frac{4}{5}, \sqrt{\frac{25}{4}}, \sqrt{\frac{16}{2}}, -1, \sqrt[3]{33}, (\sqrt{5,68})^2$

