2.1 Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

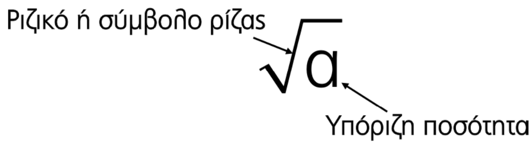
Ερώτηση 1

Τι ονομάζεται τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού;

Απάντηση

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α λέγεται ο θετικός αριθμός ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.



Σχόλιο:

α) Δεν ορίζουμε ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωγό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η $\sqrt{-16}$ **δεν έχει νόημα**, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -16.

β) Από τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας προκύπτει ότι:

- Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$
- Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$.

Ερώτηση 2

Είναι σωστές ή λάθος οι παρακάτω προτάσεις;

α) $\sqrt{25} = -5$ β) $\sqrt{(-5)^2} = -5$

Απάντηση

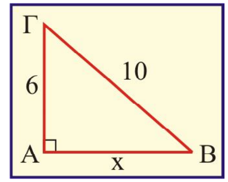
Σύμφωνα με τα παραπάνω:

α) Είναι λάθος να γράφουμε $\sqrt{25} = -5$, παρόλο που $(-5)^2 = 25$, καθώς -5 < 0.

β) Είναι λάθος να γράφουμε $\sqrt{(-5)^2} = -5$, καθώς -5 < 0.
Το σωστό είναι $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5$.

Ερώτηση 3

α. Διατυπώστε το Πυθαγόρειο θεώρημα (Π.Θ.).
β. Που χρησιμεύει το Π.Θ.;
γ. Να υπολογίσετε την πλευρά x του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ.



Απάντηση

α. Το Πυθαγόρειο θεώρημα διατυπώνεται ως εξής:
Το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο κάθετων πλευρών.
Δηλαδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90^\circ$ ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

β. Το Πυθαγόρειο θεώρημα χρησιμεύει στον υπολογισμό οποιασδήποτε πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε τις άλλες δύο πλευρές του.

γ. Από το Π.Θ. στο τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$x^2 + 6^2 = 10^2$ ή

$x^2 + 36 = 100$ ή

$x^2 = 64$ ή

$x = 8$

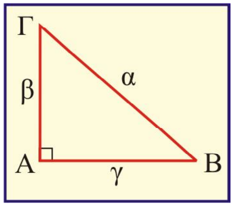
Ερώτηση 4

α. Διατυπώστε το αντίστροφο του Π.Θ.
β. Που χρησιμεύει το αντίστροφο του Π.Θ.;
γ. Εξετάστε αν το τρίγωνο με πλευρές 6 cm, 7 cm, και 9 cm είναι ορθογώνιο.

Απάντηση

Το αντίστροφο του Π.Θ. διατυπώνεται ως εξής:
Όταν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς τριγώνου εί-

ναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.
Δηλαδή αν $α^2 = β^2 + γ^2$ τότε $\widehat{A} = 90^\circ$.



β. Το αντίστροφο του Π.Θ. χρησιμεύει στο να ελέγχουμε αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή όχι όταν γνωρίζουμε τις τρεις πλευρές του.

γ. Για να είναι ορθογώνιο θα πρέπει με βάση το αντίστροφο του Π.Θ. να ισχύει:

$9^2 = 6^2 + 7^2$ ή $81 = 36 + 49$ ή $81 = 85$, άτοπο.

Αυτό όμως δεν ισχύει άρα το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α. i. $\sqrt{81}$, ii. $\sqrt{0,81}$, iii. $\sqrt{8100}$

β. i. $\sqrt{\frac{9}{4}}$, ii. $\sqrt{\frac{25}{36}}$, iii. $\sqrt{\frac{225}{81}}$ iv. $\sqrt{16 \cdot 64}$

Λύση

α. i. $\sqrt{81} = 9$ αφού $9^2 = 81$ και $9 > 0$

ii. $\sqrt{0,81} = 0,9$ αφού $0,9^2 = 0,81$ και $0,9 > 0$

iii. $\sqrt{8100} = 90$ αφού $90^2 = 8100$ και $90 > 0$

β. i. $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ αφού $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ και $\frac{3}{2} > 0$

ii. $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$ αφού $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{30}$ και $\frac{5}{6} > 0$

iii. $\sqrt{\frac{225}{81}} = \frac{15}{9}$ αφού $\left(\frac{15}{9}\right)^2 = \frac{225}{81}$ και $\frac{15}{9} > 0$

iv. $\sqrt{16 \cdot 64} = \sqrt{4^2 \cdot 8^2} = \sqrt{(4 \cdot 8)^2} = \sqrt{32^2} = 32$

2 Να υπολογισθεί η παράσταση:

$$A = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$$

Λύση

$$\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{7 + 2}}} =$$
$$\sqrt{14 + \sqrt{1 + \sqrt{9}}} = \sqrt{14 + \sqrt{1 + 3}} = \sqrt{14 + \sqrt{4}} =$$
$$\sqrt{14 + 2} = \sqrt{16} = 4$$

Προσοχή! Εκτελούμε τις πράξεις ξεκινώντας από τις “μέσα” προς τις “έξω” ρίζες.

3 Συμπληρώστε τις ισότητες:

1. $\sqrt{36} =$ ...... $\sqrt{0,36} =$ ...... $\sqrt{3600} =$ ......

2. $\sqrt{0} =$...... $\sqrt{1} =$ ...... $(\sqrt{α})^2 =$ ......

Λύση

1. $\sqrt{36}=6$ $\quad\sqrt{0,36}=0,6$ $\quad\sqrt{3600}=60$

2. $\sqrt{0}=0$ $\quad\sqrt{1}=1$ $\quad\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$,με $\alpha>0$

Αν $\alpha<0$, δεν ορίζεται.

4 Να υπολογιστούν οι ακόλουθες τετραγωνικές ρίζες:

i) $\sqrt{10\cdot 800}$ $\qquad$ ii) $\sqrt{0,1681}$

Λύση

i) Αναλύουμε το $10\cdot800$ σε γινόμενο πρώτων παραγώντων

$$\begin{array}{r|l} 10.800 & 2 \\ 5.400 & 2 \\ 2.700 & 2 \\ 1.350 & 2 \\ 675 & 3 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα: $10.800=2^4\cdot3^3\cdot5^2=2^2\cdot2^2\cdot5^2\cdot3^2\cdot3$

και: $\sqrt{10.800}=\sqrt{2^2\cdot2^2\cdot5^2\cdot3^2\cdot3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5^2}\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{3}=$

$2\cdot2\cdot5\cdot3\cdot\sqrt{3}=60\sqrt{3}$

ii) $0,1681=\dfrac{1.681}{10.000}=\dfrac{1.681}{10^4}=\dfrac{1.681}{\left(10^2\right)^2}$

Αναλύω το 1.681 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων

$$\begin{array}{r|l} 1.681 & 41 \\ 41 & 41 \\ 1 & \end{array}$$

Άρα $1.681=41\cdot41=41^2$

και: $\sqrt{0,1681}=\sqrt{\dfrac{41^2}{100^2}}=\sqrt{\left(\dfrac{41}{100}\right)^2}=\dfrac{41}{100}=0,41$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Η εξίσωση $x^2 = 25$ έχει τις λύσεις*

Α. μόνο το 5 Β. μόνο το -5 Γ. το -5 και το 5

2 *Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.*

α. $\sqrt{16} = 4$ ☐

β. $\sqrt{100} = 50$ ☐

γ. $\sqrt{64} = -8$ ☐

δ. $\sqrt{25-16} = 5-4 = 1$ ☐

3 *Να αντιστοιχίσετε τα ριζικά της 1ης στήλης με τη σωστή απάντηση της 2ης στήλης.*

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{81}$	1. 8
β. $\sqrt{100-36}$	2. 9
γ. $\sqrt{16+9}$	3. 5

4 *Αν x είναι ένας θετικός αριθμός, στις παρακάτω προτάσεις να συμπληρώσετε τη σωστή απάντηση.*

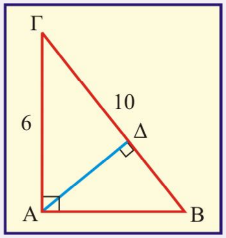
1. Αν $\sqrt{x} = 5$, τότε x=.........
2. Αν $\sqrt{x} = -25$, τότε x=.........
3. Αν $\sqrt{144} = x$, τότε x=.........
4. Αν $\sqrt{x} = 25$, τότε x=.........

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ΒΓ = 10cm και ΑΓ = 6cm. Να υπολογίσετε:

α. Την πλευρά ΑΒ **β.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ,

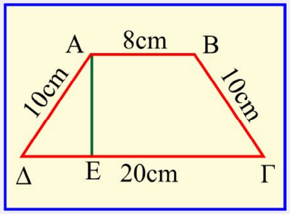
γ. Το ύψος ΑΔ.



2 Το τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές με ΑΒ = 8 cm,
ΑΔ = ΒΓ = 10 cm και ΓΔ = 20 cm. Να υπολογίσετε:

α. Το ύψος ΑΕ του τραπεζίου.

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου.

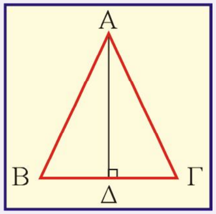


3 Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) η περίμετρός του είναι 54 cm και η ΑΒ = 15cm . Να υπολογίσετε:

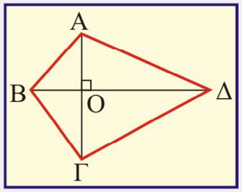
α. Το ύψος ΑΔ.

β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

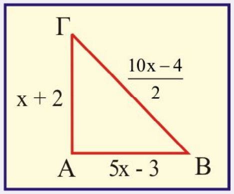
γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.



4 Να εξετάσετε αν ισχύει: $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2$

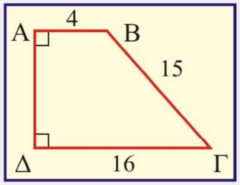


5 Η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 30 cm. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.



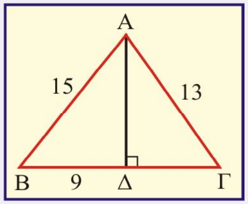
6

Στο τραπέζιο ΑΒΓΔ έχουμε: $AB = 4cm$, $\Gamma\Delta = 16cm$, $B\Gamma = 15cm$.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.



7

Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $AB = 15$, $A\Gamma = 13$, $B\Delta = 9$
Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.



8

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$
9	81								
25	49								

Τι παρατηρείτε;

9

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $3\left(x-2\sqrt{5}\right)+4\left(4\sqrt{5}-2x\right)=-2\left(\sqrt{5}+3x\right)$ ii) $2\left(\sqrt{3}-x\right)-\left(x-3\sqrt{2}\right)=3\sqrt{2}+x$

10

Να υπολογίσετε τις ακόλουθες τετραγωνικές ρίζες:

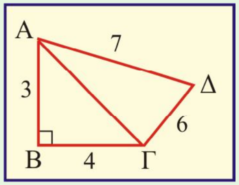
i) $\sqrt{1.521}$ ii) $\sqrt{841}$ iii) $\sqrt{40.000}$ iv. $\sqrt{15.625}$

11

Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $x^2+\left(\frac{x}{3}\right)^2=40$ ii) $2+3\sqrt{9x+10}=32$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1



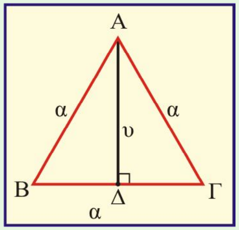
i. Πως διατυπώνεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και πως το αντίστροφό του;
ii. Εξετάστε αν το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 2

i. Τι λέμε τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού α;
ii. Για ποιες τιμές του ακέραιου x έχει νόημα η παράσταση:

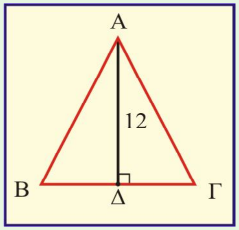
$$A=\sqrt{\frac{2x-1}{2}+3}-\sqrt{-x-\frac{1-x}{3}}$$

ΘΕΜΑ 3



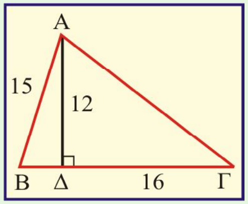
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο με πλευρά α. Αν ΑΔ είναι το ύψος του να αποδείξετε ότι: $\alpha^2=\frac{4}{3}\upsilon^2$

ΘΕΜΑ 4



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) το εμβαδόν του είναι 60 m^2 και το ύψος του ΑΔ είναι 12 m. Να δείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι 36m.

ΘΕΜΑ 5



Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $AB=15,\ A\Delta=12,\ \Gamma\Delta=16$

α. Να υπολογίσετε την ΒΔ.
β. Να υπολογίσετε την ΑΓ.
γ. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.