

1.5 Ανισώσεις α' βαθμού

Ερώτηση 1

Τι ανίσωση προκύπτει αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό;

Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ανίσωσης προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $a < \beta$ τότε $a + \gamma < \beta + \gamma$ και $a - \gamma < \beta - \gamma$.

Αν $a > \beta$ τότε $a + \gamma > \beta + \gamma$ και $a - \gamma > \beta - \gamma$.

Ερώτηση 2

Τι ανίσωση προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τον ίδιο θετικό ή τον ίδιο αρνητικό αριθμό και στα δύο μέλη της ανίσωσης;

Απάντηση

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο θετικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ανίσωση με την ίδια φορά. Δηλαδή:

Αν $a < \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $a > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν και τα δύο μέλη μιας ανίσωσης πολλαπλασιαστούν ή διαιρεθούν με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι

μια ανίσωση με την αντίστροφη φορά. Δηλαδή:

Αν $a < \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$.

Αν $a > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$ και $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

Ερώτηση 3

Τι ονομάζεται ανίσωση;

Απάντηση

Μια ανίσωση που περιέχει μια μεταβλητή και η οποία αληθεύει για ορισμένες τιμές της μεταβλητής, λέγεται **ανίσωση** με έναν άγνωστο.

Ερώτηση 4

Πώς επιλύουμε μια ανίσωση;

Απάντηση

Για να επιλύσουμε μια ανίσωση ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

1. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών (αν υπάρχουν)
2. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών (αν υπάρχουν), πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της ανίσωσης με το Ε.Κ.Π.
3. Κάνουμε τις πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)
4. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
5. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων
6. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου (αν είναι διάφορο του μηδενός). Η φορά της ανισότητας παραμένει ίδια αν είναι θετικός και αλλάζει αν είναι αρνητικός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να λυθεί η ανίσωση:

$$2x + 3 < 3(x + 2) + 15 - 7x$$

Λύση

$$2x + 3 < 3(x + 2) + 15 - 7x$$

Απαλοιφή παραθεσίων:

$$2x + 3 < 3x + 6 + 15 - 7x$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

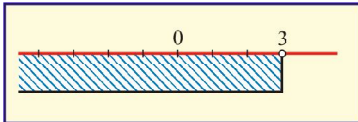
$$2x - 3x + 7x < -3 + 6 + 15$$

Αναγωγή ομοίων όρων: $6x < 18$

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου: $x < \frac{18}{6}$
 $x < 3$

Ο συντελεστής του αγνώστου είναι το 6, θετικός αριθμός. Άρα η φορά της ανίσωσης δεν αλληλάζει.

Οι λύσεις της ανίσωσης είναι άπειροι αριθμοί (Όλοι όσοι είναι μικρότεροι από το 3). Αυτοί μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως εξής:



Το χαρακτηριστικό κυκλάκι στο 3 δηλώνει ότι ο αριθμός 3 δεν είναι λύση της ανίσωσης.

Αυτό είναι προφανές διότι το 3 δεν είναι μικρότερο του 3.

2 Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x}{2} - 3 \geq 7x + 10$

Λύση

$$\frac{x}{2} - 3 \geq 7x + 10$$

Απαλοιφή παρονομαστών:

$$z \cdot \frac{x}{z} - 2 \cdot 3 \geq 2 \cdot 7x + 2 \cdot 10$$

$$x - 6 \geq 14x + 20$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$x - 14x \geq 20 + 6$$

Αναγωγή ομοίων όρων:

$$-13x \geq 26$$

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου:

$$x \leq \frac{26}{-13}$$

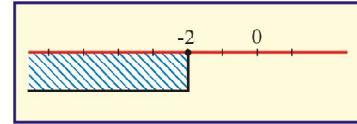
$$x \leq -2$$

Προσοχή!!!

Ο συντελεστής του αγνώστου είναι το -13 που είναι αρνητι-

κός αριθμός. Άρα η φορά της ανίσωσης αλληλάζει και από " \geq ", γίνεται " \leq ".

Οι λύσεις της ανίσωσης παριστάνονται γραφικά ως εξής:



Στη θέση του -2 έχουμε βάλει ένα χαρακτηριστικό έντονο σημείο που δηλώνει ότι το -2 συμπεριλαμβάνεται στις λύσεις της ανίσωσης.

3

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $3x + 1 > 2x - 2$ και $8(x + 4) < 6x + 30$

Λύση

$$3x + 1 > 2x - 2$$

$$3x - 2x > -2 - 1$$

$$x > -3$$

$$8(x + 4) < 6x + 30$$

$$8x + 32 < 6x + 30$$

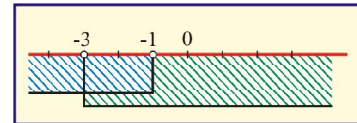
$$8x - 6x < 30 - 32$$

$$2x < -2$$

$$x < -\frac{2}{2}$$

$$x < -1$$

Τοποθετούμε τις λύσεις και των δύο ανισώσεων πάνω στον ίδιο άξονα.



Μεταξύ των αριθμών -3 και -1 βλέπουμε ότι συμπίπτουν οι δύο "ταινίες". Αυτό είναι το διάστημα στο οποίο αληθεύουν συγχρόνως οι δύο ανισώσεις. Άρα, οι κοινές λύσεις των ανισώσεων είναι οι αριθμοί μεταξύ του -3 και του -1, δηλαδή $-3 < x < -1$.

4

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων

$$5x - 7 \geq 3 \quad \text{και} \quad 2(x + 11) > 3x + 21.$$

Λύση

$$5x - 7 \geq 3$$

$$5x \geq 7 + 3$$

$$5x \geq 10$$

$$x \geq \frac{10}{5}$$

$$x \geq 2$$

$$2(x + 11) > 3x + 21$$

$$2x + 22 > 3x + 21$$

$$2x - 3x > -22 + 21$$

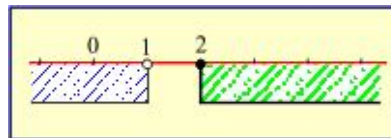
$$-x > -1$$

$$x < \frac{-1}{-1}$$

$$x < 1$$

Προσοχή!!!

Η φορά της δεύτερης ανίσωσης αληθίζει γιατί ο συντελεστής του αγνώστου με τον οποίο διαιρέσαμε είναι ο αρνητικός αριθμός -1 . Μια γραφική παράσταση των λύσεων φαίνεται παρακάτω:



Βλέπουμε ότι οι δύο ταινίες δεν συμπίπτουν πουθενά. Τότε λέμε ότι οι δύο ανισώσεις δεν έχουν κοινές λύσεις.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Να συμπληρώσετε τα κενά

α. Αν $x < 5$, τότε $x + 5$

β. Αν $x \geq 2$, τότε $x - 3$

γ. Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-2}$

δ. Αν $x \leq 6$, τότε $\frac{x}{-2}$

στ. Αν $x \leq -\frac{1}{2}$, τότε $-4x$

ζ. Αν $x > 7$, τότε $\frac{3x}{-2}$

2

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Αν $a < \beta$, τότε $a - 5 < \beta - 5$

β. Αν $a < 0$, τότε $2a < a$

γ. Αν $a > 1$, τότε $\frac{1}{a} > 1$

δ. Η ανίσωση $x + 200 > x + 205$, αληθεύει για κάθε αριθμό

ε. Η ανίσωση $2x - 5 > 4x + 3$ έχει λύσεις τους αριθμούς $x > 4$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $18 - (2x + 7) < -4(x - 2)$

β. $3x + 8 \geq 31 + 5(x + 2)$

2

Να λυθεί η ανίσωση:

$3(x - 2) - 2(x - 3) + 1 \leq 5(2 - x) + 9$

3

Να λυθεί η ανίσωση:

$27x - (11x - 5) > 2(5x + 1) + 6x + 20$

4

Να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{x+1}{4} + \frac{x+2}{3} < \frac{7x}{12} + 2$

5

Να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{6x+1}{8} + 3 \leq \frac{x}{2} + \frac{x-3}{4}$

6

Να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{3x-1}{2} - \frac{2(x+1)}{18} < \frac{5x}{9} + \frac{1}{2}$

7

Να λυθεί η ανίσωση:

$\frac{2x-1}{4} > \frac{5x-1}{3} + \frac{1-x}{5}$

8

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$3 - (5x - 2) > 2x - (x + 7)$

και

$3x + 7 > 7(1 - x)$

9

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$\frac{2x+1}{2} - \frac{3x-2}{6} > 5 - \frac{x}{3}$

και

$8(x-1) > 3(2x+3) - 13$

10

Να λύσετε τις ανισώσεις: α) $2 \leq 2 \cdot x + 1 < 5$ β) $2 \cdot x < x + 4 \leq 2 \cdot x + 2$

- 11** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $-3(2x-5)-2(x-1) < -5x+8+6(2-x)$ και $3x+7-2(x+1) \leq 3$
- 12** Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων: $\frac{x}{4} > \frac{x+3}{6}$ και $5(11x-2)+2(3x+7) < 19(3x+1)+1$
- 13** Δίνεται η ανίσωση $(6\mu-12)x > 11$, όπου το μ είναι ένας τυχαίος αριθμός. Να λύσετε την ανίσωση για τις διάφορες τιμές του μ . Για ποια τιμή του μ η ανίσωση είναι αδύνατη;
- 14** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $5x+9(2x-1) \geq 4-10(2x+1)$ **β.** $2x-10(x+2) < 4x-6(x+1)$
- 15** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $13x+5 \geq 6(x+4)+2$ **β.** $8x+2(4-x) > 7(x+2)-11$
- 16** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $2(3x+1)+5(2x-6) < 4(x+7)-3(x-1)+1$
β. $-2(x+7) < 3(x-1)+8(x+7)+4(2x+4)$
- 17** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $\frac{x-1}{3} + \frac{3-4x}{6} \geq \frac{2x-2}{4}$ **β.** $\frac{26-2x}{4} < \frac{x-2}{3}$
- 18** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $\frac{5-x}{3} < \frac{12+x}{6} + \frac{7}{6}$ **β.** $\frac{3x+1}{5} + \frac{2-3x}{15} \geq \frac{6x-1}{3} + 2$
- 19** Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x-\frac{1}{2}}{3} + \frac{x-\frac{1}{3}}{2} \leq \frac{3x+1}{6} - \frac{x+\frac{1}{4}}{2}$
- 20** Να λύθούν οι ανισώσεις: **α.** $6x-4+2(x-11) \leq 2(4x+37)$ **β.** $3-5(x+12) \leq 19x+3-12(2x+4)$

21 Να λυθούν οι ανισώσεις: **α.** $x + 9(2x - 3) \geq 4 + \frac{38x - 1}{2}$ **β.** $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} < \frac{x}{10} + \frac{13x - 11}{30}$

22 Δίνεται η ανίσωση: $(3\eta - 18)x < -5$
Να βρείτε τον αριθμό η έτσι ώστε η ανίσωση να είναι αδύνατη.

23 Δίνεται η ανίσωση: $\left(\frac{\eta}{3} + \frac{5 - 2\eta}{8}\right)x < 4$
Να βρείτε τον αριθμό η έτσι ώστε η ανίσωση να ισχύει για κάθε x .

24 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:
 $6 + 13x - 5(x + 1) \leq 2(5x + 1) - 7(x - 2)$ και $3x + 1 > 6x - 2(2x - 1) + 1$

25 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:
 $2x + 7 > 5(x - 3) + 31$ και $14(x + 2) + 3(2x + 1) < 5(2x - 1) - 4$

26 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:
 $2x + 3 < 5(x + 1) - 11$ και $\frac{1}{2}x + 4 > -2$

27 Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:
α) $\frac{x - 1}{3} + 5 > 2x + 3$ και $17 - 3(x - 1) \leq -(5x + 14)$

β) $2(3 \cdot x - 4) - 8 \geq 5 \cdot x + 1 - 3(6 \cdot x + 7)$ και $\frac{2 \cdot x - 3}{6} - \frac{x + 1}{2} \leq 3x - \frac{3x - 1}{4}$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

Τι ονομάζουμε ανίσωση;

Να αναφέρετε ποια είναι η διαφορά στην διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης και μιας ανίσωσης;

ΘΕΜΑ 2

Πότε μια ανίσωση ονομάζεται αδύνατη;

Να βρείτε τον αριθμό μ έτσι ώστε η ανίσωση $(8\mu - 48)x < -36$, να είναι αδύνατη.

ΘΕΜΑ 3

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{3x-1}{6} + \frac{x-5}{2} \leq \frac{5-3x}{3} - \frac{2x-7}{4}$

ΘΕΜΑ 4

Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$6x + 4 < 2\left(\frac{7}{2}x - 3\right) \quad \text{και} \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{5} < 8$$

ΘΕΜΑ 5

Ο Δημήτρης έχει 50€. Θέλει να αγοράσει ένα παιχνίδι που κοστίζει 18€ και να κεράσει τους φίλους του από ένα παγωτό. Αν το κάθε παγωτό κάνει 3€, να βρείτε:

α) Πόσους το πολύ φίλους μπορεί να κεράσει αν φάει και αυτός ένα παγωτό;

β) Πόσα χρήματα θα του περισσέψουν;

