

## 1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

### Ερώτηση 1

Ποιες σχέσεις ισχύουν μεταξύ δύο αριθμών  $a$  και  $\beta$ ;

### Απάντηση

Έστω δύο αριθμοί  $a$  και  $\beta$ . Μεταξύ τους θα ισχύουν:  $a = \beta$  ή  $a < \beta$  ή  $a > \beta$ .

### Ερώτηση 2

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προστεθεί ή αφαιρεθεί ένας αριθμός  $\gamma$ , η ισότητα διαταράσσεται; Τι γίνεται στην περίπτωση που πολλαπλασιαστεί ή διαιρεθεί το κάθε μέλος της ισότητας αυτής με έναν ίδιο αριθμό  $\gamma$ ;

### Απάντηση

Αν και στα δύο μέλη μιας ισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν  $a = \beta$ , τότε  $a + \gamma = \beta + \gamma$ .

Αν και από τα δύο μέλη μιας ισότητας αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν  $a = \beta$ , τότε  $a - \gamma = \beta - \gamma$ .

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας πολλαπλασιαστούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν  $a = \beta$  τότε  $a \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ .

Ομοίως:

Αν και τα δύο μέλη μιας ισότητας διαιρεθούν με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει και πάλι μια ισότητα. Δηλαδή:

Αν  $a = \beta$ , τότε  $\frac{a}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$  με  $\gamma \neq 0$ .

### Ερώτηση 3

Τι ονομάζεται εξίσωση με έναν άγνωστο; Τι λέγεται λύση της εξίσωσης;

### Απάντηση

Εξίσωση ονομάζουμε μια ισότητα η οποία περιέχει αριθμούς και μια μεταβλητή (άγνωστος). Ο άγνωστος συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα  $x$ .

π.χ.  $3x + 5 = 2x + 9$

Ότι είναι αριστερά από το " $=$ ", λέγεται πρώτο μέλος της εξίσωσης (εδώ το  $3x + 5$ ).

Ότι είναι δεξιά από το " $=$ ", λέγεται δεύτερο μέλος της εξίσωσης (εδώ το  $2x + 9$ ).

Οι όροι που περιέχουν το  $x$  λέγονται άγνωστοι όροι (όπως το  $3x$  και το  $2x$ ).

Οι υπόλοιποι λέγονται γνωστοί όροι της εξίσωσης.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης ονομάζεται ο αριθμός που την επαληθεύει. Παρατηρούμε ότι, αν στη θέση του  $x$  βάλουμε τον αριθμό 4, τότε η εξίσωση θα γίνει:

$3 \cdot 4 + 5 = 2 \cdot 4 + 9$ .

Δηλαδή  $17 = 17$ . Άρα προκύπτει κάτι αληθές. Λέμε ότι ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση ή αλλιώς, ότι η λύση της εξίσωσης είναι ο αριθμός 4.

### Ερώτηση 4

Ποια βήματα ακολουθούμε για να λύσουμε μια εξίσωση; Να δώσετε δύο παραδείγματα εφαρμόζοντας αναλυτικά τα βήματα.

### Απάντηση

Για να επιλύσουμε μια εξίσωση α' βαθμού ακολουθούμε τα επόμενα βήματα:

1. Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών (αν υπάρχουν)
2. Κάνουμε απαλοιφή των παρονομαστών (αν υπάρχουν), πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους της εξίσωσης με το ΕΚ.Κ.Π.
3. Απαλοΐφουμε τις παρενθέσεις (επιμεριστική ιδιότητα)
4. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους
5. Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων

6. Διαιρούμε και τα δύο μέλη με το συντελεστή του αγνώστου, αν είναι διάφορος του μηδέν. Αλλιώς η εξίσωση είναι ταυτότητα ή αδύνατη.

### Παράδειγμα 1<sup>ο</sup>.

$$x + 8(x + 3) + 7 = 3(x + 2) - 11$$

Απαλοιφή παρενθέσεων:

$$x + 8x + 24 + 7 = 3x + 6 - 11$$

Η απαλοιφή παρενθέσεων γίνεται χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα.

Μεταφέρουμε όλους τους άγνωστους όρους στο ένα μέλος και όλους τους γνωστούς στο άλλο. Όποιος όρος αλληλάζει μέλος, θα αλληλάζει και πρόσημο.

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$x + 8x - 3x = -24 - 7 + 6 - 11$$

Αναγωγή ομοίων όρων:  $6x = -36$

Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου:

Συντελεστής του αγνώστου είναι ο αριθμός δίπλα από το  $x$  (εδώ το 6).

$$x = \frac{-36}{6} = -6$$

Βρήκαμε λοιπόν ότι η λύση της εξίσωσης είναι το  $-6$ .

### Προσοχή!!!

Διαιρούμε όταν ο συντελεστής του αγνώστου είναι διαφορε-

τικός από το μηδέν.

Πολλές φορές σε μια εξίσωση μπορεί να υπάρχουν παρονομαστές. Τότε, κάνουμε πρώτα απαλοιφή παρονομαστών και συνεχίζουμε όπως προηγούμενως.

### Παράδειγμα 2<sup>ο</sup>

Η απαλοιφή παρονομαστών γίνεται πολλαπλασιάζοντας όλους τους όρους με το ΕΚΠ των παρονομαστών.

$$\text{Να λυθεί η εξίσωση: } \frac{x+2}{3} + 5 = \frac{3x-1}{2} + \frac{8}{3}$$

Ε.Κ.Π. (2,3) = 6

$$\text{Απαλοιφή παρονομαστών: } \cancel{6} \cdot \frac{x+2}{\cancel{3}} + 6 \cdot 5 = \cancel{6} \cdot \frac{3x-1}{\cancel{2}} + \cancel{6} \cdot \frac{8}{\cancel{3}} =$$

$$2(x+2) + 30 = 3(3x-1) + 16$$

Απαλοιφή παρενθέσεων:  $2x + 4 + 30 = 9x - 3 + 16$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:  $2x - 9x = -4 - 30 - 3 + 16$

Αναγωγή ομοίων όρων:  $-7x = -21$

$$\text{Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου: } x = \frac{-21}{-7} = 3$$

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1

Να λυθεί η εξίσωση:

$$3(x-2) + 4(3-x) = 5(x-4) + 2$$

### Λύση

Κάνουμε πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα):

$$3 \cdot x - 6 + 12 - 4 \cdot x = 5 \cdot x - 20 + 2$$

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$3 \cdot x - 4 \cdot x - 5 \cdot x = -20 + 6 - 12 + 2$$

Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων:

$$-6 \cdot x = -24$$

Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου:

$$x = \frac{-24}{-6}$$

$$x = +4$$

**2** Να λυθεί η εξίσωση:  $\frac{y+1}{2} + 2y = \frac{2y+4}{4} + 2$

**Λύση**

Θα κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πολλαπλασιάζοντας 1ο και 2ο μέλος με το Ε.Κ.Π. (Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο) των παρονομαστών. Επειδή  $\text{Ε.Κ.Π.}(2,4) = 4$  θα έχουμε:

$$4 \cdot \frac{y+1}{2} + 4 \cdot 2y = 4 \cdot \frac{2y+4}{4} + 4 \cdot 2$$

$$2(y+1) + 8y = 2y + 4 + 8$$

$$2y + 2 + 8y = 2y + 4 + 8 \leftarrow \text{Κάνουμε πράξεις (επιμεριστική ιδιότητα)}$$

$$2y + 8y - 2y = 4 + 8 - 2 \leftarrow \text{Χωρίζουμε γνωστούς - αγνώστους.}$$

$$8y = 10 \leftarrow \text{Κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων.}$$

$$\frac{8y}{8} = \frac{10}{8} \leftarrow \text{Διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.}$$

$$y = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

**3** Να λυθεί η εξίσωση:  
 $2(x-4) + 4(x-3) = 10(x-2) + 4(x-1)$

**Λύση**

$$2(x-4) + 4(x-3) = 10(x-2) + 4(x-1)$$

$$2x - 8 + 4x - 12 = 10x - 20 - 4x + 4$$

$$2x + 4x - 10x + 4x = -20 + 4 + 8 + 12$$

$$0 \cdot x = 4$$

Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς  $x$ , καθώς δε μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν. Εξάλλου, αν σκεφτούμε λογικά δε μπορούμε να βρούμε καμία τιμή για το  $x$ , τέτοια ώστε να πάρουμε την τιμή 4.

Η εξίσωση αυτή δεν έχει καμία λύση. Μια τέτοια εξίσωση λέγεται **αδύνατη**.

**4** Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{4}{5} - \frac{2x+2}{10} = \frac{4-3x}{5} + \frac{4x-2}{10}$$

**Λύση**

Θα βρούμε το Ε.Κ.Π.  $(5,10) = 10$  και θα πολλαπλασιάσουμε 1ο και 2ο μέλος με το 10.

$$10 \cdot \frac{4}{5} - 10 \cdot \frac{2x+2}{10} = 10 \cdot \frac{4-3x}{5} + 10 \cdot \frac{4x-2}{10}$$

$$2 \cdot 4 - (2x+2) = 2 \cdot (4-3x) + 4x - 2$$

$$8 - 2x - 2 = 8 - 6x + 4x - 2$$

$$-2x + 6x - 4x = -8 + 2 + 8 - 2$$

$$0 \cdot x = 0$$

Στην περίπτωση αυτή, δε μπορούμε να λύσουμε ως προς  $x$ , καθώς δε μπορούμε να διαιρέσουμε με το μηδέν, δηλαδή τον συντελεστή του αγνώστου. Παρατηρούμε όμως ότι η εξίσωση  $0 \cdot x = 0$  επαληθεύεται για κάθε τιμή του  $x$ . Η εξίσωση αυτή λέγεται **ταυτότητα**.

## ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Στις παρακάτω ισότητες να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει.

α.  $8 + \dots = 41$

ε.  $24 + \dots = 8$

β.  $128 - \dots = 101$

στ.  $2 \cdot \dots + 8 = 26$

γ.  $34 - \dots = 42$

ζ.  $5 \cdot \dots + 12 = 52$

δ.  $8 \cdot \dots = 48$

2 Να εξετάσετε αν οι παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος.

α. Η εξίσωση  $2x = 4x - 10$  έχει λύση τον αριθμό 5.

β. Η εξίσωση  $x + 2 = x$  είναι αδύνατη.

γ. Η εξίσωση  $8x = 0$  είναι ταυτότητα.

δ. Οι εξισώσεις  $2x = 8$  και  $5x - 4x = 4$  έχουν την ίδια λύση.

3 Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση της στήλης Α με την λύση της στην στήλη Β.

**Στήλη Α**

**Στήλη Β**

α.  $-8x = 16$

1. 2

β.  $5x - x = 8$

2. -2

γ.  $\frac{1}{2} \cdot x = -2$

3. 4

δ.  $\frac{20}{8}x = 10$

4. -4

## ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λύθούν οι εξισώσεις:

α.  $4x - 3 = 3 - 2x$

β.  $3z + 8 = 6z - 10$

γ.  $7 - 2y = -6y + 4$

2

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 3(x+4) = 2(x-1) + 4 \quad \beta. 7(x-2) - 11(2-x) = 9x + 1$$

$$\gamma. 4(3-x) - 2(3 \cdot x - 4) - 9 \cdot x = -8 \cdot x - 3(1-x) + 23$$

3

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 8x + 2 - 3(x-1) - 3(2x+4) = 0$$

$$\beta. 2x + 3 = 7(x-4) + 31$$

4

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} - \frac{5-x}{4} = 14$$

5

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. 2x + 4(x-1) = 3(2x+1) - 5$$

$$\beta. 11x + 8 = x + 2(5x-3) + 14$$

6

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x-3}{5} - \frac{x+1}{3} = \frac{2}{15}$$

7

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{y-3}{2} - \frac{y-5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{y}{3}$$

$$\beta. \frac{\omega+10}{5} + \frac{\omega-5}{10} = \frac{8-\omega}{5} + 3$$

8

Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha. \frac{7x-3}{14} + \frac{1}{7} = \frac{3(6x-5)}{2} + \frac{3x+2}{7}$$

$$\beta. \frac{2(x-1)}{3} - \frac{-3(2 \cdot x + 1)}{2} = \frac{3(x-2)}{2}$$

$$\gamma. 12 - \left( \frac{3 \cdot x + 1}{4} + \frac{2 \cdot x + 1}{3} \right) = 10 - \left( \frac{5 \cdot x - 1}{4} - \frac{x + 5}{6} \right)$$

9

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\alpha. \frac{x-\frac{1}{2}}{5} + \frac{2x+\frac{1}{3}}{10} = \frac{\frac{x}{2}+7}{5}$$

$$\beta. \frac{\frac{3+x}{2}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{\frac{2-x}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3(2x-1)}{2}}{1+\frac{1}{3}}$$

$$\gamma. x - \frac{1}{3} \left( \frac{3 \cdot x}{2} - x \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{4 \cdot x}{3} - 3 \right)$$

$$\delta. \frac{6 \cdot x - 7}{24} - \frac{1}{2} \left( \frac{x-2}{4} + \frac{x-1}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( \frac{x+2}{4} - \frac{x+1}{2} \right)$$

$$\epsilon. \frac{3(x-4)}{4} - \frac{2(x+5)}{3} - \frac{3x-5}{2} = 2 - \frac{5(x+1)}{6} - x$$

**10** Έστω η εξίσωση  $(3\mu - 9)x = 17$ , όπου το  $x$  είναι ο άγνωστος και το  $\mu$  είναι κάποιος πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το  $\mu$  έτσι ώστε η εξίσωση να είναι αδύνατη.

**11** Να βρεθούν οι  $\mu$  και  $\nu$ , έτσι ώστε οι παρακάτω εξισώσεις να είναι αόριστες:

$$\alpha. 3\mu x - 2 = 4\nu + 6x$$

$$\beta. 8x + 4 = 11\nu + \mu x$$

**12** Δίνεται η εξίσωση:

$$\mu(x-7) + 5 = (\mu+3)x + 1, \text{ με } \mu \text{ πραγματικό αριθμό.}$$

Αν η εξίσωση έχει λύση την  $x = 3$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\mu$ .

**13** Δίνεται η εξίσωση  $5x - (4 - 3x) = 2x + 8$ . Αν ο αριθμός  $n$  είναι η λύση της εξίσωσης, τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:

$$A = (n+2)^{2n-1} - n(3-n)^5 + n^n - (8-n)^2$$

**14** Για ποια τιμή του  $n$

i) Η εξίσωση:  $3 \cdot x + \frac{2\lambda(x-1)}{4} = \frac{2 \cdot x - 3\lambda}{2} + 5$  είναι αδύνατη;

ii) Η εξίσωση:  $\frac{\lambda \cdot x + 6}{3} - x = \lambda - 1$  είναι ταυτότητα;

**15** Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 144, έτσι ώστε το οκταπλάσιο του πρώτου να είναι ίσο με το δεκαπλάσιο του δεύτερου.

**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ****ΘΕΜΑ 1**

Τι ονομάζουμε εξίσωση;

Ποια βήματα ακολουθούμε για τη λύση μιας εξίσωσης;

**ΘΕΜΑ 2**

Πότε μια εξίσωση λέγεται αόριστη;

Πότε μια εξίσωση λέγεται αδύνατη;

Μια εξίσωση με έναν άγνωστο που δεν είναι ούτε αόριστη ούτε αδύνατη, πόσες λύσεις έχει;

**ΘΕΜΑ 3**

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{x+5}{10} + \frac{2x-5}{5} = \frac{9-x}{5} + \frac{1}{10}$$

**ΘΕΜΑ 4**

Να λυθεί η εξίσωση:

$$7(1-3x) - 2(5x-13) = 20(-x+5) + 3(4x-7)$$

**ΘΕΜΑ 5**

Σε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ η γωνία Α είναι τριπλάσια από την  $\hat{\Gamma}$ . Η γωνία Β είναι κατά 18 μοίρες μεγαλύτερη από την  $\hat{\Delta}$ . Η  $\hat{\Delta}$  είναι ίση με το διπλάσιο της  $\hat{\Gamma}$  ελαττωμένο κατά 1. Βρείτε τις γωνίες του τετραπλεύρου.

