

Β. 1.4. Πυθαγόρειο θεώρημα



26. Παρακολουθήστε στο <http://aesop.iep.edu.gr/node/20435/5121> το βίντεο με τίτλο: *Πρόσωπα και επιστήμες – Πυθαγόρας και συζητήστε τα δύο ερωτήματα:*

α) Πώς θα αξιοποιηθεί η σκάλα;

.....

.....

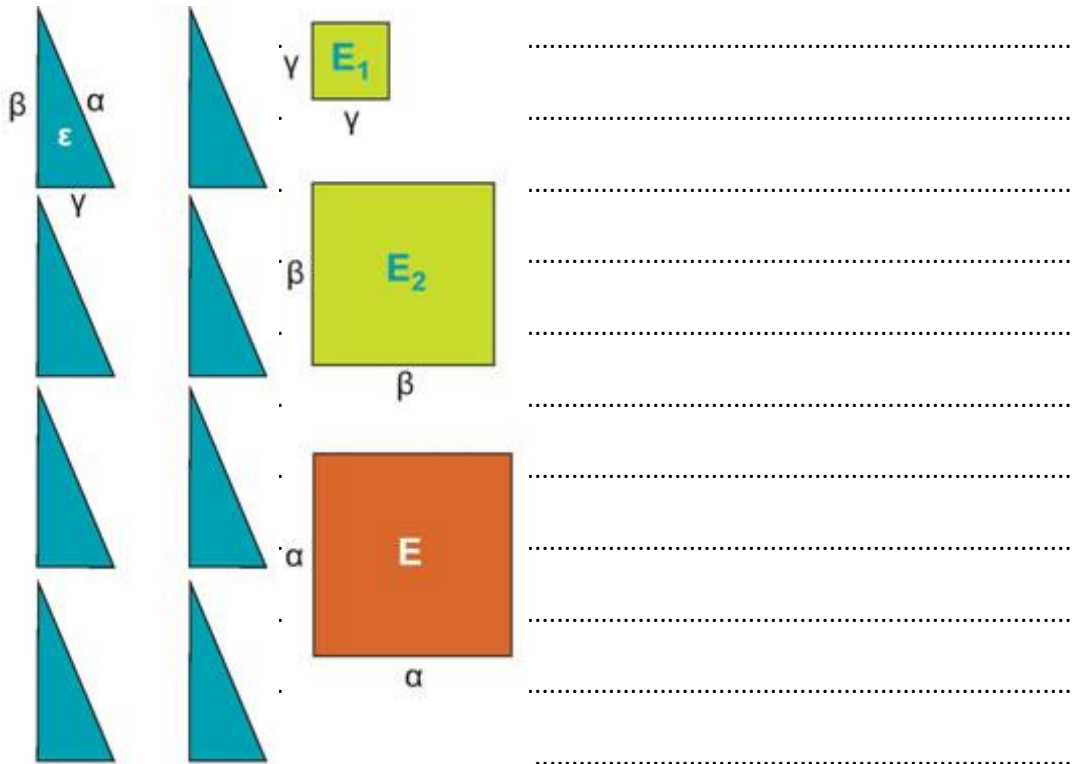
β) Πώς πιστεύετε ότι μπορεί να υπολογιστεί το μήκος της σκάλας;

.....

.....

27. Δίνονται 8 ίσα ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές β , γ και υποτείνουσα α και τρία τετράγωνα με πλευρές α , β , γ αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά ϵ , E_1 , E_2 , E των παρακάτω τριγώνων και τετραγώνων.



β) Εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp7.ggb. Μπορείτε να κατασκευάσετε δύο τετράγωνα με πλευράς $\beta + \gamma$;

γ) Αν ναι ποια σχέση προκύπτει από την ισότητα των εμβαδών τους;

.....

.....

Η σχέση που συνδέει τις κάθετες πλευρές με την υποτείνουσα ενός τριγώνου, εκφράζει το Πυθαγόρειο θεώρημα:

Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

Στην Αρχαία Αίγυπτο για την κατασκευή ορθών γωνιών χρησιμοποιούσαν ένα σκοινί. Το σκοινί έχει 13 κόμπους σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους που σχηματίζουν 12 ίσα ευθύγραμμα τμήματα.

Μεταγενέστερα, οι αρχαίοι Έλληνες επαλήθευσαν τον ισχυρισμό αυτό αποδεικνύοντας την γενική πρόταση, που είναι γνωστή ως το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος:

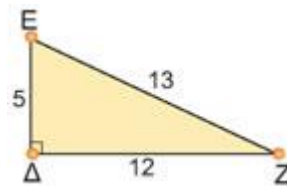


Να διατυπώσετε το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος.

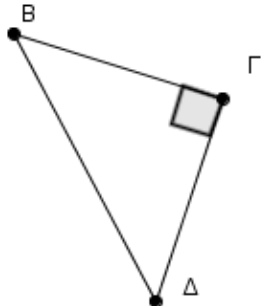
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

Να επαληθεύσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο του σχήματος.

.....
.....
.....
.....



28. Να διατυπώσετε το Πυθαγόρειο θεώρημα για το ακόλουθο τρίγωνο:



.....
.....
.....
.....

29. Παρακολουθήστε στο <http://aesop.iep.edu.gr/node/20435/5121> το διαδραστικό βίντεο με τίτλο: Παρουσίαση του Πυθαγορείου Θεωρήματος και συζητήστε τα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

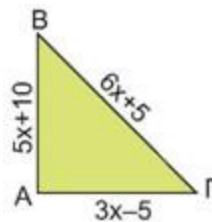
30. Να εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp8.ggb. Τι παρατηρείτε;

.....
.....
.....
.....

31. Στο διπλανό σχήμα, το τρίγωνο ABΓ έχει περίμετρο 150 m.

- α) Να βρείτε τον αριθμό x.
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

.....
.....
.....



32. Μία διογκώσιμη κεκλιμένη ράμπα έχει μήκος 8 μέτρα και ύψος 6 μέτρα. Πόσα μέτρα είναι η επιφάνεια της ράμπας;



.....

.....

.....

.....

.....

33. Οι κατασκευαστές του μικρού πάρκου έχουν καταγράψει ότι αυτό έχει σχήμα ορθογωνίου τριγώνου. Να ελέγξετε αν είναι σωστό.

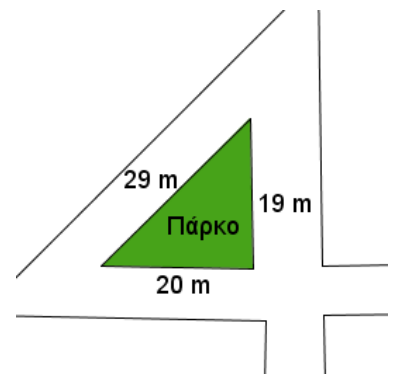
.....

.....

.....

.....

.....



34. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς 12 cm. Το σημείο Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και ΒΡ = 3 cm.

- α) Να υπολογίσετε τα $ΜΔ^2$, $ΜΡ^2$ και $ΔΡ^2$.
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΡΔ είναι ορθογώνιο στο Μ.

.....

.....

.....

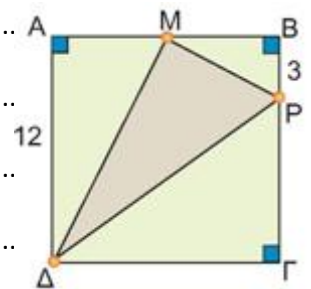
.....

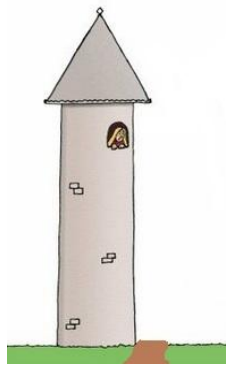
.....

.....

.....

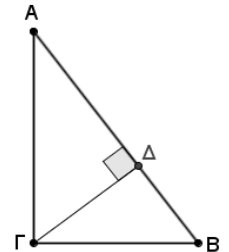
.....





35. Η πριγκίπισσα Φιόνα είναι κλειδωμένη στον πύργο. Έχετε αποφασίσει να την βοηθήσετε. Εάν α) το παράθυρο του πύργου είναι 40 μέτρα πάνω από το έδαφος, β) χρειάζεται να τοποθετήσετε τη σκάλα σας 9 μέτρα από την βάση του πύργου (λόγω της τάφρου), πόσα μέτρα θα πρέπει να είναι τουλάχιστον η σκάλα σας ώστε να φτάσει το παράθυρο;
 α) 38 μέτρα β) 40 μέτρα
 γ) 44 μέτρα δ) 41 μέτρα

36. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο, το ΓΔ είναι ύψος. Να επιλέξετε τις σωστές προτάσεις
 α) $\Gamma\Delta^2 = \text{ΑΓ}^2 - \text{ΑΔ}^2$ β) $\text{ΑΒ}^2 = \text{ΑΓ}^2 - \text{ΒΓ}^2$
 γ) $\text{ΑΓ}^2 = \text{ΑΔ}^2 + \text{ΓΔ}^2$ δ) $\text{ΑΔ}^2 = \text{ΑΒ}^2 - \text{ΒΔ}^2$



37. Να εργαστείτε στο μικροπείραμα: mp9.ggb. Τι παρατηρείτε;

.....

.....

.....

.....

.....

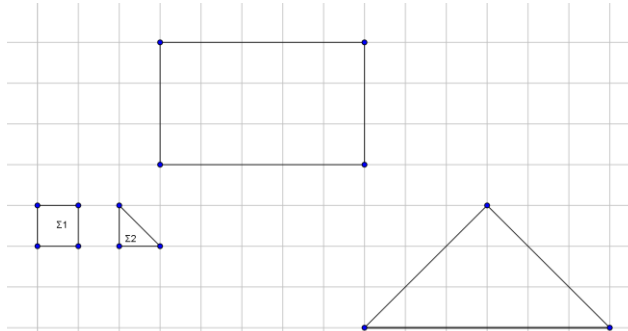
38. Να αντιστοιχίσετε σωστά τις παρακάτω εκφράσεις

1. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	α) Ορθή
2. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	β) Αμβλεία
3. Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι μικρότερο από το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι:	γ) Οξεία

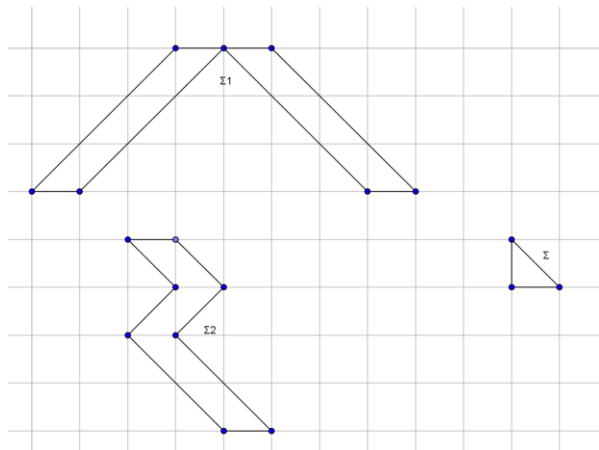
Απάντηση: 1, 2, 3

Ασκήσεις προς λύση Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

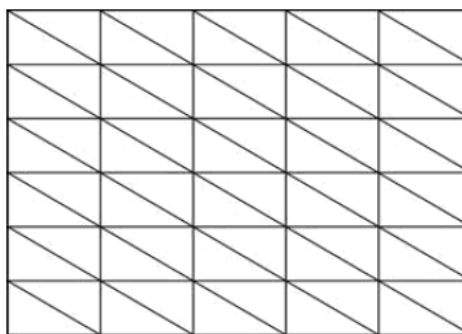
- 1.1.** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων με μονάδα μέτρησης:
α) το σχήμα Σ1
β) το σχήμα Σ2



- 1.2.** Να υπολογίσετε τα εμβαδά των σχημάτων Σ1 και Σ2 με μονάδα μέτρησης το σχήμα Σ.

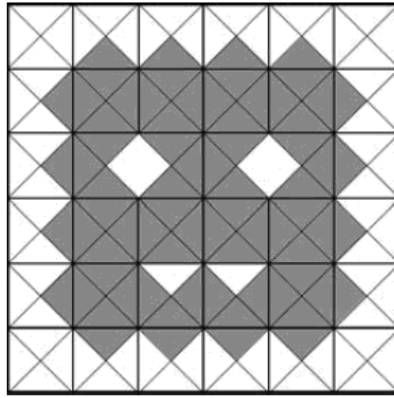



- 1.3.** Η αυλή ενός σπιτιού έχει σχήμα ορθογωνίου και πρόκειται να στρωθεί με τριγωνικά πλακάκια, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.




- α)** Πόσα πλακάκια θα χρειαστούν;
β) Ποιο είναι το εμβαδόν της αυλής με μονάδα μέτρησης το τριγωνικό πλακάκι;
γ) Ποιο θα ήταν το εμβαδόν της αυλής, αν χρησιμοποιούσαμε ως μονάδα μέτρησης ορθογώνια πλακάκια με πλευρές τις κάθετες πλευρές των παραπάνω τριγώνων;

1.4. Ποιο είναι το εμβαδόν του παρακάτω γραμμοσκιασμένου σχήματος;



α) με μονάδα μέτρησης το τρίγωνο  ;

β) με μονάδα μέτρησης το τετράγωνο  ;

Εμβαδά Επίπεδων Σχημάτων

1.5. Αν η περίμετρος ενός τετραγώνου είναι 60 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.6. Τραπεζίο έχει εμβαδόν 99 cm^2 και ύψος 6 cm. Να βρείτε τα μήκη των βάσεων του αν η μια είναι 3cm μεγαλύτερη από την άλλη.

1.7. Τετράγωνο είναι ισοδύναμο με ρόμβο. Αν η περίμετρος του τετραγώνου είναι 64cm και η μια διαγώνιος του ρόμβου είναι 20 cm, να βρείτε το μήκος της άλλης διαγωνίου του ρόμβου.

1.8. Ορθογώνιο δάπεδο έχει διαστάσεις 3,25 m και 42,3 dm. Θέλουμε να καλύψουμε το ορθογώνιο δάπεδο με τετραγωνικά πλακάκια πλευράς 15cm.

α) Πόσα πλακάκια θα χρειαστούμε για να καλύψουμε το ορθογώνιο δάπεδο;

β) Το κάθε πλακάκι κοστίζει 0,7ευρώ. Πόσα θα μας κοστίσει η κάλυψη του δαπέδου;

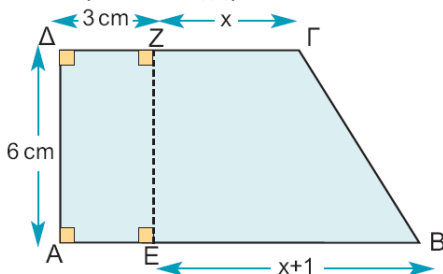
1.9. Ένα παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν 60 cm^2 και περίμετρο 24 cm. Αν η μία πλευρά του είναι 4 cm, να υπολογίσετε τα ύψη του.

1.10. Ένα χωράφι έχει σχήμα ορθογώνιο και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του.

α) Πόσα στέμματα είναι το εμβαδόν του αν γνωρίζουμε ότι η περιμέτρος του είναι 720m.

β) Πόσα χρήματα θα εισπράξει ο ιδιοκτήτης του αν το πουλήσει προς 540€ το στέμμα;

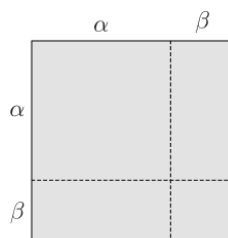
1.11. Στο παρακάτω σχήμα:



α) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τραapeζίου ABΓΔ ως συνάρτηση του x.

β) Αν το εμβαδόν του τραapeζίου ABΓΔ είναι το τετραπλάσιο από το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΕΖΔ, να υπολογίσετε το x.

- 1.12.** Το σαλόνι σε ένα σπίτι είναι ορθογώνιο και έχει διαστάσεις 4,5 m και 3 m. Η ιδιοκτήτρια του σπιτιού έστρωσε δύο χαλιά στο σαλόνι, το ένα είχε σχήμα ορθογωνίου με διαστάσεις 2,5 m και 2 m και το δεύτερο σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ακάλυπτης επιφάνειας.
- 1.13.** Η περίμετρος ενός παραλληλογράμμου είναι 40 cm, η πλευρά του 8 cm και το ύψος που αντιστοιχεί στην άλλη πλευρά είναι 3 cm. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι κατά 4 cm^2 μεγαλύτερο από το εμβαδόν του παραλληλογράμμου. Οι βάσεις του τραπεζίου είναι 4cm και 12cm.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
β) Να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου.
- 1.14.** Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το Β και παίρνουμε τμήμα ΒΕ=2ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο ΑΒΓΔ και το τρίγωνο ΒΓΕ έχουν το ίδιο εμβαδόν.
- 1.15.** Ο Κώστας έψαχνε οικόπεδο, για να κτίσει το σπίτι του. Πήγε στον κτηματομεσίτη, ο οποίος του πρότεινε δύο οικόπεδα, ίσης αξίας, στην ίδια περιοχή, για να διαλέξει το ένα. Το πρώτο είχε σχήμα ορθογώνιο με μήκος 32 m και πλάτος 28 m και το άλλο τετράγωνο με πλευρά 30 m. Ποιο από τα δυο διάλεξε ο Κώστας; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- 1.16.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ύψος 3 cm και μεγάλη βάση ΓΔ 14 cm. Το εμβαδόν του τραπεζίου είναι 30 cm^2 .
α) Να υπολογίσετε το μήκος της βάσης ΑΒ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ.
γ) Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι τα εμβαδά των τριγώνων ΒΔΜ και ΓΔΜ είναι ίσα.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΓΔΜ.
- 1.17.** Πόσο τοις εκατό θα αυξηθεί το εμβαδόν ενός τετραγώνου αν αυξήσουμε τις πλευρές του κατά 15%;
- 1.18.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΓΔ = 18 cm και αντίστοιχο ύψος ΑΕ = 6 cm. Στην πλευρά ΑΒ θεωρούμε σημείο Ζ ώστε ΑΖ = 14 cm.
α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.
β) Να υπολογίσετε το άθροισμα των εμβαδών του τριγώνου ΑΔΕ και του τραπεζίου ΕΓΒΖ.
γ) Αν δίνεται ότι ΔΕ = 5 cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ και το εμβαδόν του τραπεζίου ΕΓΒΖ.
- 1.19.** Αποδείξτε την ισότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta$ με δύο τρόπους:
α) Πολλαπλασιάζοντας τις παρενθέσεις $(\alpha + \beta)$ και $(\alpha + \beta)$
β) Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα:



- 1.20.** Για να μην τσακώνονται δύο γείτονες που τα οικόπεδά τους συνόρευαν αποφάσισε ο ένας να περιφράξει το οικόπεδό του που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά ίση με 50 m. Έβαλε ολόγυρα πασσάλους σε απόσταση 5 m τον ένα από τον άλλο.
α) Πόσους πασσάλους χρειάστηκε;
β) Αν ο κάθε πάσσαλος κοστίζει 10 €, πόσο του κόστισε η αγορά των πασσάλων;
γ) Το κάθε μέτρο περίφραξης κοστίζει 15 €. Πόσο κόστισε συνολικά η περίφραξη μαζί με τους πασσάλους;

1.21. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ με μικρή βάση ΑΒ = 2 cm και μεγάλη βάση ΓΔ = 11 cm. Θεωρούμε σημεία Ζ και Ε στην πλευρά ΒΓ ώστε να είναι ΒΖ = 3 cm, ΖΕ = 4 cm και ΕΓ = 5 cm.

- α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΖΕΔ.

1.22. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} > 90^\circ$) με ΑΒ = 4,8 cm, ΑΓ = 3 cm και ύψος ΒΖ = 4 cm.

- α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΕ.

Πυθαγόρειο Θεώρημα

1.23. Αν α, β, γ είναι οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου με α την μεγαλύτερη πλευρά του. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

	Πλευρά α	Πλευρά β	Πλευρά γ	α^2	$\beta^2 + \gamma^2$	Είναι ορθογώνιο το τρίγωνο;
Τρίγωνο Α	10	8	6			
Τρίγωνο Β	7	6	5			
Τρίγωνο Γ	13	5	12			
Τρίγωνο Δ	12	11	4			

1.24. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και βάση ΒΓ = 6 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

1.25. Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.26. Η περίμετρος ενός ρόμβου είναι 20 cm και η μια διαγώνιος του 8 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.27. Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο ορθογωνίου που έχει διαγώνιο 13 cm και πλάτος 5 cm.

1.28. Ορθογώνιο τρίγωνο έχει υποτείνουσα 10 cm και μια κάθετη πλευρά 8 cm. Να υπολογίσετε:

- α)** το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς
β) το εμβαδόν του τριγώνου και το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του.

1.29. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο η μεγάλη βάση του είναι 20 cm, οι δύο μη παράλληλες πλευρές είναι 5 cm και η περίμετρός του είναι 44 cm. Να υπολογίσετε:

- α)** το ύψος του τραπεζίου
β) το εμβαδόν του τραπεζίου.

1.30. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, όπου ΑΔ ύψος και έχουμε ότι ΑΒ = 17 cm, ΑΓ = 10 cm, ΓΔ = 6 cm. Να υπολογίσετε:

- α)** το μήκος της πλευράς ΒΓ.
β) την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.
γ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

1.31. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 480 cm². Το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι 24 cm και το τμήμα ΔΓ είναι 12 cm. Να υπολογίσετε:

- α)** Το τμήμα ΒΔ.
β) Την πλευρά του ΑΒ.
γ) Το ύψος του ΓΜ.

1.32. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με περίμετρο 22cm. Αν $AB = 2x + 1$, $ΑΓ = 15 - 2x$ και $ΒΓ = 4x - 10$.

α) Να υπολογίσετε το x .

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

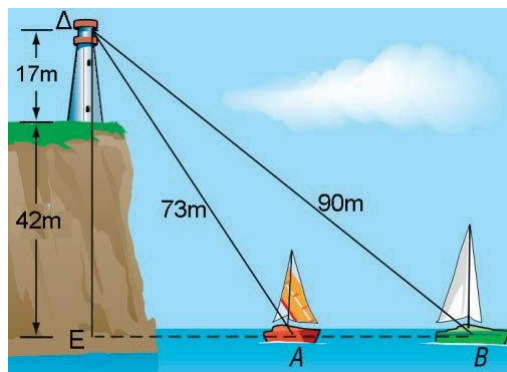
1.33. α) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με πλευρές που έχουν μήκη 3,4,5. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

β) Διπλασιάστε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ABΓ. Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

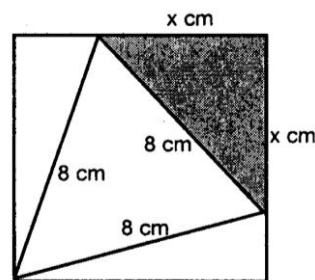
γ) Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με μήκη πλευρών α, β, γ . Το τρίγωνο με μήκη πλευρών $\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma$ (λ φυσικός αριθμός) είναι ορθογώνιο;

1.34. Ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει εμβαδόν 19 cm^2 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου.

1.35. Να υπολογίσετε κατά προσέγγιση ακεραίου την απόσταση που έχουν μεταξύ τους οι δύο βάρκες του σχήματος που βρίσκονται στις θέσεις A και B.



1.36. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά 8cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τετράγωνο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Ποιο το ηλίκο του εμβαδού του τριγώνου προς το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης περιοχής; (Από το ημερολόγιο της NCTM)



1.37. Σ' ένα ρόμβο πλευράς 10cm το μήκος της μιας διαγωνίου του είναι 16cm. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της άλλης διαγωνίου του.

β) το εμβαδόν του ρόμβου.

1.38. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ και $\Gamma\Delta = 7 \text{ cm}$, $ΑΒ = 17 \text{ cm}$, $ΑΓ = 25 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς ΒΓ

β) την περίμετρο του τραpezίου

γ) το εμβαδόν του τραpezίου