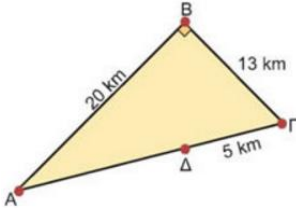


A. 2.3. Προβλήματα



65. Πρόβλημα 1. Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις $AB = 20 \text{ km}$, $BΓ = 13 \text{ km}$ και $ΓΔ = 5 \text{ km}$.

Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;



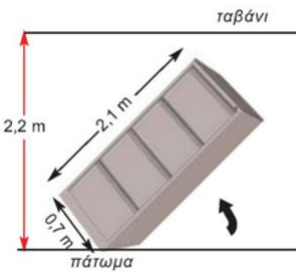
.....

.....

.....

.....

66. Πρόβλημα 2. Μπορείτε να σηκώσετε όρθιο το ντουλάπι του σχήματος; Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp13.ggb.



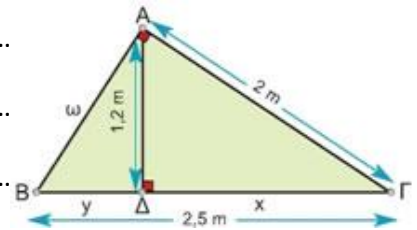
.....

.....

.....

.....

67. Πρόβλημα 3. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x , y και ω .



.....

.....

.....

.....

68. Πρόβλημα 4. Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x , y έχουν λόγο $\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ασκήσεις προς λύση

Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

1.39. Αν $x > 0$, να βρείτε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι σωστές.

α) $\sqrt{x^2} = x$

β) $(\sqrt{x})^2 = x$

γ) $\sqrt{(-x)^2} = -x$

δ) $\sqrt{(-x)^2} = |-x|$

1.40. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{36}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{4900}$

β) $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{4}{81}}$, $\sqrt{225}$

γ) $\sqrt{\frac{196}{100}}$, $\sqrt{\frac{529}{676}}$, $\sqrt{144}$

δ) $\sqrt{\frac{0,09}{0,16}}$, $\sqrt{\frac{1,69}{2,89}}$, $\sqrt{\frac{0,004}{0,225}}$

1.41. Αν είναι $\alpha < 0$, ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και γιατί;

α) $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|$

β) $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

γ) $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$

δ) $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

1.42. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\sqrt{14^2}$

β) $\sqrt{(-10)^2}$

γ) $\sqrt{27 \cdot 27}$

δ) $\sqrt{(-4)^2} + \sqrt{(-5)^2}$

ε) $\sqrt{(-2)^2} + \sqrt{2^2}$

1.43. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	y	\sqrt{x}	\sqrt{y}	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt{x \cdot y}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\sqrt{x} + \sqrt{y}$	$\sqrt{x+y}$
25	4								
9	49								
10	36								

α) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$ και $\sqrt{x \cdot y}$. Τι παρατηρείτε;

β) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$ και $\sqrt{\frac{x}{y}}$. Τι παρατηρείτε;

γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ και $\sqrt{x+y}$. Τι παρατηρείτε;

Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

1.44. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $7\sqrt{11} - \sqrt{5} - 2\sqrt{11} + 4\sqrt{5}$

β) $\sqrt{7}(2\sqrt{7} - 1)$

γ) $(\sqrt{2} - 3)(1 - 2\sqrt{2})$

δ) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$

1.45. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\sqrt{63} - 3\sqrt{2} - \sqrt{28} + \sqrt{18}$

β) $\frac{3\sqrt{8} - 2\sqrt{18} - 5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

γ) $\frac{2\sqrt{3} - 3\sqrt{12} + \sqrt{27}}{\sqrt{75} - 4\sqrt{3}}$

1.46. Να αποδείξετε ότι:

α) $|\sqrt{63} - \sqrt{28}| - |1 - \sqrt{7}| - 1 = 0$

β) $\sqrt{32} - 5\sqrt{18} + 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50} = -7\sqrt{2}$

γ) $5\sqrt{7} - \frac{6}{5}\sqrt{175} - \frac{7}{2}\sqrt{28} + \frac{8}{3}\sqrt{63} = 0$

δ) $2|\sqrt{18} + \sqrt{9}| - |\sqrt{8} - \sqrt{16}| - 2 = 8\sqrt{2}$

1.47. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

β) $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{9}}}$

γ) $\sqrt{13 - \sqrt{21 - \sqrt{29 - \sqrt{16}}}}$

δ) $\sqrt{2 + \sqrt{45 + \sqrt{22 - \sqrt{36}}}}$

1.48. Αν $-2 \leq x \leq 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(2-x)^2}$

β) $B = \sqrt{(x-4)^2} - \sqrt{(3-x)^2}$

1.49. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{16x^2y^4}$ αν $x, y > 0$

β) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$ αν $x, y, z > 0$

γ) $\sqrt{16x^2y^4}$

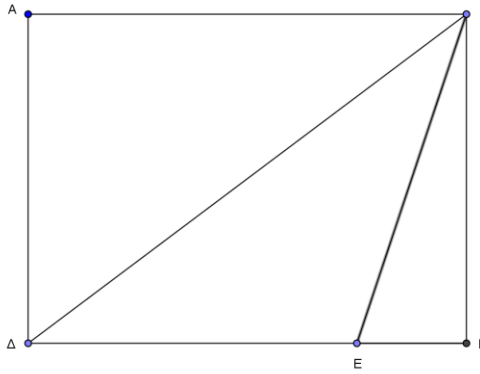
δ) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$

1.50. α) Αν $x = 9$, να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς x, x^2, \sqrt{x} .

β) Αν $x = \frac{1}{4}$ να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς x, x^2, \sqrt{x} .

γ) Ποιο είναι το συμπέρασμα από τα αποτελέσματα των παραπάνω περιπτώσεων;

1.51. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με $AB = 8, BD = 10$ και σημείο Ε στην ΓΔ ώστε $EG = 2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΔ.



1.52. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μικρή βάση $AB = 10$, μη παράλληλες πλευρές $BG = AD = 5$ και ύψος 3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραpezίου ΑΒΓΔ.

1.53. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη $x - 2, x, x + 2$. Αν το x ικανοποιεί τη σχέση $(x - 1)(x + 3) = x^2 + 13$

- α) Να υπολογίσετε το x .
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

1.54. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{4 - \sqrt{11 - \sqrt{4}}}$, $\beta = \sqrt{-3 + \sqrt{54 - \sqrt{25}}}$, $\gamma = \sqrt{\sqrt{81}}$.

- α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ .
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές τους αριθμούς α, β, γ είναι ορθογώνιο.
- γ) Να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και να το υπολογίσετε.

1.55. Να υπολογίσετε την τιμή του α , όπου $\alpha > 8$, έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα:

$$\sqrt{\alpha - \sqrt{74 - \sqrt{85 + \sqrt{225}}}} = 5$$

1.56. Να βρείτε τον αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα του μοτίβου:



Ποιο σχήμα θα έχει 200 σκιασμένα τετράγωνα;

1.57. Για να εκτιμήσει η αστυνομία την ταχύτητα (km/h) ενός τύπου οχήματος τη στιγμή που πατά τα φρένα ο οδηγός, χρησιμοποιεί τον τύπο $u = 9\sqrt{\frac{d}{0,16}}$, όπου d το μήκος(m) του αποτυπώματος των λαστίχων στην άσφαλτο.

- α) Να εκτιμήσετε την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου του οποίου τα λάστιχα άφησαν αποτυπώματα μήκους: 4 m, 12 m, 16 m.
- β) Ένας αστυνομικός για να υπολογίζει πιο γρήγορα την ταχύτητα έχει μετασχηματίσει τον τύπο ως εξής: $u = \frac{9\sqrt{d}}{0,4}$. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.

Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

1.58. Να βρείτε το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{34}$.

1.59. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις ως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:

- α) $\sqrt{6}$
- β) $\sqrt{13}$

1.60. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:

- α) $\sqrt{8}, 1, \sqrt{3}, \sqrt{10}$
- β) $\sqrt{11}, 6, \sqrt{17}, \sqrt{21}, 10$
- γ) $1 + \sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, \sqrt{3} - 1, 2 + \sqrt{3}$
- δ) $\sqrt{3} + \sqrt{2}, \sqrt{5}$
- ε) $\sqrt{5}, \sqrt{2 + \sqrt{5}}$

1.61. Να λύσετε τις εξισώσεις:

- α) $x^2 = 6$
- β) $x^2 = -2$
- γ) $x^2 = 1$
- δ) $x^2 = 11$

1.62. Να βρείτε δύο αριθμούς x και y , έτσι ώστε να ισχύει: $5 < \sqrt{x} < \sqrt{y} < 6$.

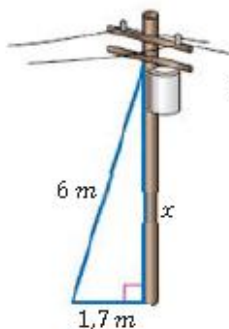
1.63. Να εξετάσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους παρακάτω αριθμούς συμπληρώνοντας τις κατάλληλες στήλες:

Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
15					
$\frac{2}{5}$					
$-\sqrt{5}$					
$\sqrt{100}$					
$4,15$					
0,7777					
π					
-12					

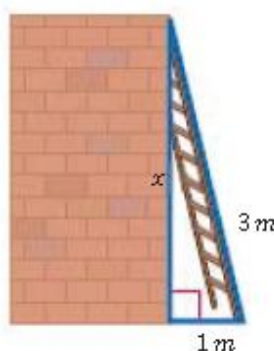
Προβλήματα στους άρρητους αριθμούς

1.64. Να υπολογίσετε το μήκος x στις παρακάτω περιπτώσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου):

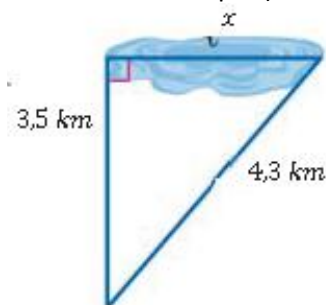
α)



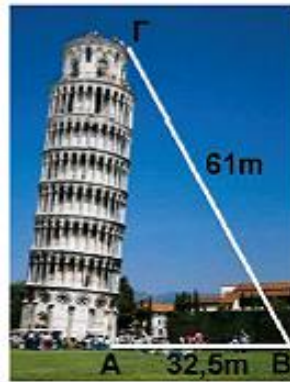
β)



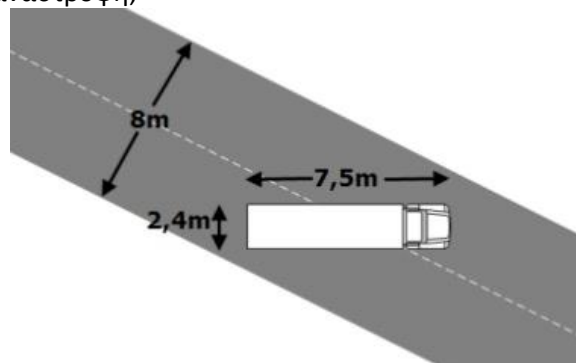
γ)



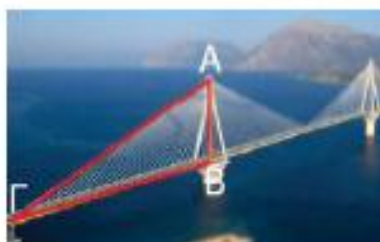
- 1.65.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν $AB = 12$ cm, $B\Gamma = 15$ cm, να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν του τριγώνου.
β) το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.
- 1.66.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με εμβαδό 400 cm². Το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου είναι 25 cm και το τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι 15 cm. Να υπολογίσετε:
α) το τμήμα $B\Delta$
β) την πλευρά του AB
γ) το ύψος του ΓM .
- 1.67.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 5$ cm και $B\Gamma = 6$ cm. Να υπολογίσετε:
α) το ύψος $A\Delta$ του τριγώνου.
β) το εμβαδόν του τριγώνου.
γ) το ύψος ΓZ .
- 1.68.** Να αποδείξετε ότι ο πύργος της Πίζας που έχει ύψος 55 m, δεν είναι τοποθετημένος σε όρθια θέση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).



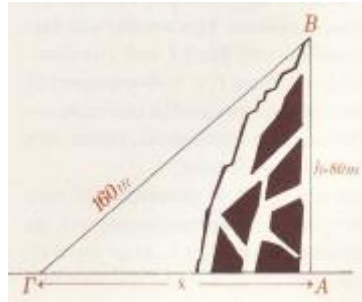
- 1.69.** Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m. Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογώνιου με μήκος $7,5$ m και πλάτος $2,4$ m. Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;



- 1.70.** Στην παρακάτω φωτογραφία φαίνεται η γέφυρα που ενώνει το Ρίο με το Αντίρριο. Η γέφυρα στηρίζεται σε 5 πυλώνες. Από την κορυφή κάθε πυλώνα ξεκινούν καλώδια που καταλήγουν στο κατάστρωμα της γέφυρας. Αν το ύψος του πυλώνα AB είναι 100 m και το μεγάλο καλώδιο $A\Gamma$ καταλήγει σε απόσταση 280 m από τη βάση του πυλώνα, να υπολογίσετε το μήκος $A\Gamma$ του καλωδίου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).

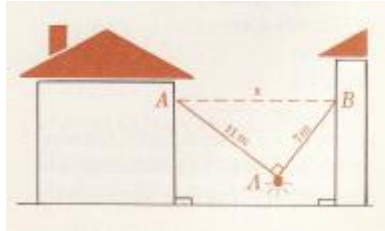


- 1.71.** Ένας στρατιώτης των Ειδικών Δυνάμεων κατεβαίνει από ύψος $h = 80$ m πάνω στο τετνωμένο συρματόσχοινο. Το μήκος της διαδρομής είναι 160 m.

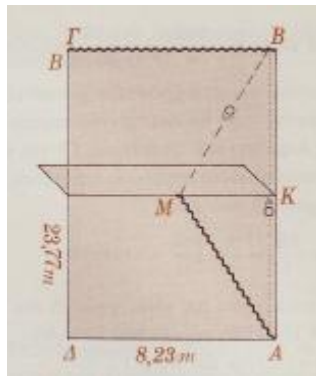


- α)** Να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ.
β) Να βρείτε την κλίση του συρματόσχοινο.

- 1.72.** Μια λάμπα κρέμεται με τη βοήθεια δύο συρματόσχοινων ΑΛ και ΒΛ αντίστοιχα 11 m και 7 m. Η γωνία που σχηματίζουν είναι $\hat{A}LB = 90^\circ$. Να υπολογίσετε το πλάτος του δρόμου x με προσέγγιση εκατοστού.



- 1.73.** Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει ένα γήπεδο τένις με διαστάσεις 8,23 m πλάτος και 23,77 m μήκος. Σε μια χρονική στιγμή οι παίκτες βρίσκονται στις θέσεις Μ και Γ.



- α)** Αν το μπαλάκι που έχει αποκρουσθεί από τον παίκτη του σημείου Μ κατευθύνεται προς το σημείο Β με ταχύτητα 20 m/s, με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Γ για να προλάβει να αποκρούσει το μπαλάκι στο σημείο Β;
β) Αν τελικά ο παίκτης του σημείου Γ κάνει την απόκρουση στο σημείο Β και το μπαλάκι κατευθύνεται προς το σημείο Α με την προηγούμενη ταχύτητα με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Μ προς το Α ώστε μόλις να αποκρούσει;

(Οι ασκήσεις 1.71, 1.72 και 1.73 προέρχονται από το βιβλίο: Αλεξίου, Κ.Τ., Αμπλιανίτου, Γ., Καββαδίας, Κ. (1990). *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*, Βιβλιοεκδοτική Αναστασάκη, Αθήνα.)