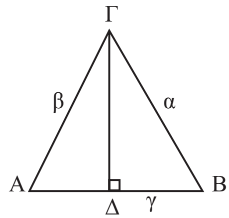
2.4 Νόμος των ημιτόνων – Νόμος των συνημιτόνων

Ποιος είναι ο νόμος των ημιτόνων .

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}$

Απόδειξη:

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΓΔ. Έτσι από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΓΔΒ έχουμε:



$\eta\mu A=\dfrac{\Gamma\Delta}{\beta}$ ή $\Gamma\Delta=\beta\cdot\eta\mu A$ (1)

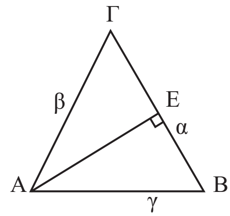
$\eta\mu B=\dfrac{\Gamma\Delta}{\alpha}$ ή $\Gamma\Delta=\alpha\cdot\eta\mu B$ (2)

Από (1) και (2) έχουμε : $\beta\cdot\eta\mu A=\alpha\cdot\eta\mu B$ ή $\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}$ (3) .

Φέρνουμε το ύψος ΑΕ . Έτσι από τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ και ΑΕΒ έχουμε : $\eta\mu\Gamma=\dfrac{AE}{\beta}$ ή $AE=\beta\cdot\eta\mu\Gamma$ (4) , $\eta\mu B=\dfrac{AE}{\gamma}$ ή $AE=\gamma\cdot\eta\mu B$ (5)

Από (4) και (5) $\beta\cdot\eta\mu\Gamma=\gamma\cdot\eta\mu B$ ή $\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$ (6) .

Από (3) και (6) $\dfrac{\alpha}{\eta\mu A}=\dfrac{\beta}{\eta\mu B}=\dfrac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$



Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει ο νόμος των ημιτόνων σε αμβλυγώνιο και ορθογώνιο τρίγωνο.

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε το συμπέρασμα ότι:

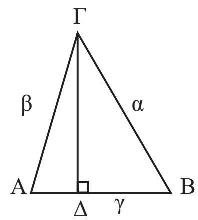
Οι πλευρές κάθε τριγώνου είναι ανάλογες προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του.

Με τον νόμο των ημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα πρωτεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, όταν γνωρίζουμε: μία πλευρά ενός τριγώνου, την απέναντι γωνία της και μία άλλη πλευρά ή γωνία του.

Ποιος είναι ο νόμος των συνημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν:

$$\boldsymbol{\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A}$$
$$\boldsymbol{\beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu B}$$
$$\boldsymbol{\gamma^2=\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta\cdot\sigma\upsilon\nu A}$$



Απόδειξη:

Έστω το τρίγωνο ΑΒΓ είναι οξυγώνιο. Τότε στο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΓΔ. Αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΓ εφαρμόσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \Delta B^2$ (1). Επειδή $\Delta B = \gamma - A\Delta$ ή ισότητα (1) γράφεται: $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + (\gamma - A\Delta)^2$ ή $\alpha^2 = \Delta\Gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot A\Delta + A\Delta^2$ (2). Από το ορθογώνιο ΑΔΓ έχουμε: $\Delta\Gamma^2 + A\Delta^2 = \beta^2$ και $\text{συν}A = \dfrac{A\Delta}{\beta}$ ή $A\Delta = \beta \cdot \text{συν}A$

Οπότε η ισότητα (2) γράφεται: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\gamma \cdot \beta \cdot \text{συν}A$

Κατά τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει ο νόμος των συνημιτόνων σε αμβλυγώνιο ή ορθογώνιο τρίγωνο.

Με το νόμο των συνημιτόνων μπορούμε να υπολογίσουμε όλα τα πρωτεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου, όταν γνωρίζουμε: τις τρείς πλευρές του τριγώνου ή δύο πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους.
Αν από τους παραπάνω τύπους λύσουμε ως προς το συνημίτονο τότε παίρνουμε: $\text{συν}A = \dfrac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma}$, $\text{συν}B = \dfrac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{2\alpha\gamma}$, $\text{συν}\Gamma = \dfrac{\beta^2 + \alpha^2 - \gamma^2}{2\alpha\beta}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Σε ένα τρίγωνο είναι $\hat{B} = 60^0$, $\beta = 8cm$, $\gamma = 12cm$. Να υπολογίσετε τους τα άλλα κύρια στοιχεία του τριγώνου όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Λύση

Από τον νόμο των ημιτόνων έχουμε : $\dfrac{\beta}{\text{ημ}B} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$ ή $\dfrac{8}{\text{ημ}60^0} = \dfrac{12}{\text{ημ}\Gamma}$

ή $8\text{ημ}\Gamma = 12\text{ημ}60^0$ ή $8\text{ημ}\Gamma = 12 \cdot \dfrac{1}{2}$ ή $\text{ημ}\Gamma = \dfrac{3}{4}$. Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες $\hat{\Gamma} = 49^0$ ή $\hat{\Gamma} = 131^0$ απορρίπτεται διότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

Οπότε $\hat{A} = 180^0 - 60^0 - 49^0 = 71^0$.

Από το νόμο συνημιτόνων $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\text{συν}A$ ή $\alpha^2 = 64 + 144 - 2 \cdot 8 \cdot 0{,}326$

$\alpha^2 = 208 - 5{,}216$ ή $\alpha^2 = 202{,}784$ ή $\alpha = 14{,}2$ cm

2 Αν σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\alpha}{\text{ημ}\Gamma} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}A}$ τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση

Από τον νόμο των ημιτόνων είναι : $\dfrac{\alpha}{\text{ημ}A} = \dfrac{\gamma}{\text{ημ}\Gamma}$ έχουμε :

$$\alpha = \eta\mu A \cdot \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}, \text{ οπότε : } \frac{\alpha}{\eta\mu\Gamma} = \frac{\gamma}{\eta\mu A} \text{ ή } \alpha\eta\mu A = \gamma\eta\mu\Gamma \text{ ή}$$

$$\eta\mu A \cdot \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma} \cdot \eta\mu A = \gamma \cdot \eta\mu\Gamma \text{ ή } \eta\mu^2 A = \eta\mu^2\Gamma \text{ άρα } \eta\mu A = \eta\mu\Gamma \text{ , οπότε } \hat{A} = \hat{\Gamma}$$

Οπότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\eta\mu A = 3\eta\mu B$ τότε $\alpha = 3\beta$
2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\sigma\upsilon\nu A = 2\sigma\upsilon\nu B$ τότε $\alpha = 2\beta$
3. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $A = 60^0$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$
4. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu A} = \dfrac{\beta}{\sigma\upsilon\nu B} = \dfrac{\gamma}{\sigma\upsilon\nu\Gamma}$
5. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 45^0$, $\alpha = 10$ cm, $\beta = 20$ cm.
6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\eta\mu A = \eta\mu B$ τότε $\alpha = \beta$.
7. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} > 90^0$ τότε ισχύει : $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$
8. Ο νόμος των ημιτόνων δεν ισχύει σε ορθογώνιο τρίγωνο.
9. Ο νόμος συνημιτόνων ισχύει σε οποιοδήποτε τρίγωνο.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής .

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν: $\hat{A} = 60^0$, $\hat{B} = 50^0$, και $\alpha = 10\sqrt{3}$, τότε η πλευρά β είναι ίση με:
   α. $3\eta\mu 50^0$, **β.** $3\sigma\upsilon\nu 50^0$, **γ.** $20\eta\mu 50^0$ **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

2. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ η παράσταση $K = \alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$ είναι ίση με:
   α. $\alpha + \gamma$, **β.** γ, **γ.** α, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

3. Δίνεται ότι για τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει:
   $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$, τότε η γωνία $\hat{A}$ είναι ίση με:
   α. 120^0, **β.** 60^0, **γ.** 30^0, **δ.** 150^0

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\sqrt{48}$, $\beta = 8$, $\hat{A} = 60^0$. Να υπολογίσετε τα υπόλοιπα κύρια στοιχεία του τριγώνου .

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) Αν $\hat{A}=60^0$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2-\beta\gamma$

β) Αν $\hat{A}=120^0$ τότε: $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2+\beta\gamma$

3 Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha \cdot$ συνΓ $= \gamma \cdot$ συνΑ, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

4 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:

α) Τη γωνία $\hat{A}$ όταν: $\alpha = 8$, $\beta = 8$, $\gamma = 8$

β) Όλες τις γωνίες όταν: $\alpha = 5$, $\beta = 4$, $\gamma = 3$

5 Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha = \beta\,\text{συν}\Gamma + \gamma\,\text{συν}B$.

β) $\dfrac{\text{συν}A}{\alpha}+\dfrac{\text{συν}B}{\beta}+\dfrac{\text{συν}\Gamma}{\gamma}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$

6 Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{3}$ και $\hat{A}=30^0$. Να βρείτε τα υπόλοιπα στοιχεία του τριγώνου .

7 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha + \beta = 12$, $\hat{A} = 30^0$ και $\hat{B} = 45^0$. Να υπολογίσετε τις πλευρές του .

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν για τις πλευρές α, β γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma) = \alpha\beta$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο **β)** Να βρείτε τη γωνία $\hat{\Gamma}$

2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x + \text{ημ}\theta - 1 = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε θ με $0^0 \le \theta \le 180^0$.

3. Αν υπάρχει γωνία θ με $0^0 \le \theta \le 90^0$ ώστε να ισχύει: $\text{ημ}\theta = 4\lambda - 7$ και $\text{συν}2\theta = 7\lambda - 11$ να βρείτε τις τιμές του λ.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\kappa \in R$ υπάρχει γωνία ω ώστε να ισχύει:

$\text{ημ}\omega = \dfrac{\kappa}{\kappa-1}$, $\text{συν}\omega = \dfrac{\kappa+1}{\kappa-1}$

5. Αν $\text{ημ}x+\text{συν}x= -\dfrac{1}{5}$. Να υπολογίσετε:

α) $\text{ημ}x \cdot \text{συν}x$, **β)** $\dfrac{1}{\text{ημ}x}+\dfrac{1}{\text{συν}x}$, **γ)** $\text{ημ}^3x\cdot\text{συν}x + \text{ημ}x\cdot\text{συν}^3x$