2.3 Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν:

α) $ημ^2ω + συν^2ω = 1$

β) $εφω = \dfrac{ημω}{συνω}$

Απόδειξη:

α) Έστω ένα σημείο Μ(x, ψ) τότε αν $ω = x\hat{O}M$ ισχύει: $ημω = \dfrac{ψ}{ρ}$, $συνω = \dfrac{x}{ρ}$

όπου $ρ = OM = \sqrt{x^2 + ψ^2}$

Από την ισότητα $ρ = \sqrt{x^2 + ψ^2}$ έχουμε : $ρ^2 = x^2 + ψ^2$, αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη με $ρ^2$ τότε έχουμε : $\dfrac{ρ^2}{ρ^2} = \dfrac{x^2}{ρ^2} + \dfrac{ψ^2}{ρ^2}$ ή $1 = (\dfrac{x}{ρ})^2 + (\dfrac{ψ}{ρ})^2$ (1)

Επειδή $ημω = \dfrac{ψ}{ρ}$, $συνω = \dfrac{x}{ρ}$ η (1) δίνει $1 = (ημω)^2 + (συνω)^2$ δηλ

$ημ^2ω + συν^2ω = 1$

β) Αν διαιρέσουμε κατά μέλη τις ισότητες $ημω = \dfrac{ψ}{ρ}$, $συνω = \dfrac{x}{ρ}$, με την προυπόθεση $συνω \neq 0$, έχουμε : $\dfrac{ημω}{συνω} = \dfrac{\frac{ψ}{ρ}}{\frac{x}{ρ}} = \dfrac{ψ \cdot ρ}{x \cdot ρ} = \dfrac{ψ}{x} = εφω$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2 55^0 + ημ^2 125^0 = 1$, **β)** $συν^2 21^0 + συν^2 69^0 = 1$, **γ)** $συν^2 140^0 - ημ^2 130^0 = 0$

Λύση

α) Επειδή $ημ125^0 = ημ(180^0 - 55^0) = ημ55^0$. Άρα $συν^2 55^0 + ημ^2 125^0 =$
$= συν^2 55 + ημ^2 55 = 1$.

β) Επειδή $συν21^0 = ημ(90^0 - 21^0) = ημ69^0$. Άρα $συν^2 21^0 + συν^2 69^0 =$
$= ημ^2 69^0 + συν^2 69^0 = 1$.

γ) $συν140^0 = συν(180^0 - 40^0) = -συν40^0$, $συν40^0 = ημ(90^0 - 40^0) = ημ50^0$,
$ημ130^0 = ημ(180^0 - 50^0) = ημ50^0$.

Άρα: $συν^2 140^0 - ημ^2 130^0 = (-συν40^0)^2 - ημ^2 50^0 = συν^2 40^0 - ημ^2 50^0 =$
$ημ^2 50^0 - ημ^2 50^0 = 0$

2. Να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{συν^2ω - συν^4ω}{ημ^4ω - ημ^2ω} = -1$ **β)** $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

Λύση

α) $\dfrac{συν^2ω - συν^4ω}{ημ^4ω - ημ^2ω} = \dfrac{συν^2ω\,(1 - συν^2ω)}{ημ^2ω\,(ημ^2ω - 1)} = \dfrac{συν^2ω \cdot ημ^2ω}{ημ^2ω \cdot (-συν^2ω)} = -1$

β) $\dfrac{ημx + συνx}{1 + εφx} = \dfrac{ημx + συνx}{1 + \dfrac{ημx}{συνx}} = \dfrac{ημx + συνx}{\dfrac{συνx + ημx}{συνx}} = \dfrac{συνx\,(ημx + συνx)}{συνx + ημx} = συνx$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει ημω = 0 και συνω = 0.

2. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $= -\dfrac{3}{5}$ και συνω= $\dfrac{4}{5}$

3. Ισχύει $)^0 = \dfrac{ημ110^0}{συν70^0}$

4. Ισχύει $ημ70^0 \cdot εφ20^0 = ημ20^0$

5. Οι αριθμοί $ημ160^0$ και $συν70^0$ είναι ίσοι.

6. Ισχύει: $συν137^0 \cdot συν91^0 < 0$

7. Ισχύει: $συν135^0 + συν45^0 = 0$

8. Για κάθε γωνία ω ισχύει: $-1 \le ημω \le 1$

9. Η μέγιστη τιμή του 3συνω + 3 είναι το 3

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν οι γωνίες x, ψ είναι παραπληρωματικές τότε η παράσταση $Α = συν^2(180 - x) + συν^2(90 - ψ)$ είναι ίση με:
α. 0, **β.** 1, **γ.** 2, **δ.** δεν ορίζεται .

2. Η παράσταση $Α = ημ^3x + ημx \cdot συν^2x$ ισούται με:
α. 1, **β.** ημx, **γ.** εφx, **δ.** συνx

3. Η ελάχιστη τιμή της 3ημx + 3 είναι:
α. 0, **β.** 2, **γ.** 6, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να δείξετε ότι:
α) $4ημ^2ω + 4συν^2ω = 4$, **β)** $συν^2x = 1-ημ^2x$, **γ)** $ημ^2x = 1-συν^2x$
δ) $1+εφ^2x=\frac{1}{συν^2x}$, **ε)** $ημ^2x - συν^2x = 1 - 2συν^2x$.

2 Να αποδείξετε ότι :
α) $(2ημω - 3συνω)^2 + (3ημω + 2συνω)^2 = 13$
β) $ημ^4ω - συν^4ω = 2ημ^2ω - 1$
γ) $\frac{1+2ημασυνα}{ημα+συνα}= ημα+ συνα$

3 Να αποδείξετε ότι: **α)** $συν^2ω=\frac{1}{1+εφ^2ω}$, **β)** $\frac{εφ^2ω-1}{εφ^2ω+1}= ημ^2ω-συν^2ω$

4 Αν $συνx=-\frac{3}{5}$ και $90^0 < x < 180^0$, να υπολογίσετε το ημx και εφx

5 Αν $ημx=\frac{5}{13}$ και $90^0 < x < 180^0$ να βρείτε: συνx, εφx και στη συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $\frac{2εφx-2συνx}{3ημx}$

6 Αν εφx=2, να υπολογίσετε την παρακάτω παράσταση:
$Α=\frac{ημx+συνx}{συνx-ημx}$

7 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
Α $= ημ(180^0 - x) \cdot συνx \cdot εφ(180^0 - x)$
Β $= ημ(90^0 - x) \cdot εφ(180^0 - x) \cdot συνx$