2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

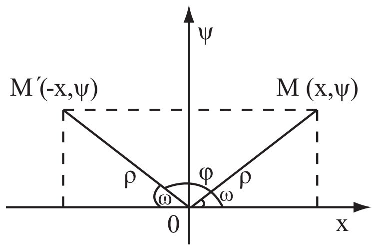
Δύο γωνίες λέγονται παραπληρωματικές όταν έχουν άθροισμα 180^0. Έστω ένα σημείο Μ(x,ψ) στο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Το συμμετρικό του Μ ως προς τον ψ′ψ είναι το σημείο Μ′(-x,ψ). Αν ονομάσουμε ω τη γωνία $x\hat{O}M$, τότε λόγω συμμετρίας είναι $x'\hat{O}M' = \omega$, οπότε για τη γωνία $\varphi = x'\hat{O}M$ ισχύει $\varphi = 180^0 - \omega$, άρα οι γωνίες ω, φ είναι παραπληρωματικές, διότι $\varphi + \omega = 180^0 - \omega + \omega = 180^0$

Επειδη ΟΜ= ΟΜ′ θα έχουμε:

$$ημω = \frac{ψ}{ΟΜ'},\quad ημφ=\frac{ψ}{ΟΜ'},$$

$$συνω=\frac{x}{ΟΜ},\quad συνφ=\frac{-x}{ΟΜ'}$$

$$εφω = \frac{x}{ψ},\quad εφφ = \frac{-x}{ψ}$$



Οπότε οι παραπληρωματικές γωνίες έχουν το ίδιο ημίτονο και αντίθετους τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς.

Γενικά: Για δύο παραπληρωματικές γωνίες ω και 180^0-ω ισχύουν:

$$ημ(180^0-ω) = ημω,\ συν(180^0-ω) = -συνω,\ εφ(180^0-ω) = -εφω$$

Παρατήρηση: Αν δύο γωνίες είναι από 0^0 μέχρι 180^0 και έχουν το ίδιο ημίτονο τότε είναι ίσες ή είναι παραπληρωματικές.

Για την γωνία ω με $0^0 \le ω \le 180^0$ ισχύουν:

$0 \le ημω \le 1$, $-1 \le συνω \le 1$, η εφω μπορεί να πάρει οποιδήποτε πραγματικό αριθμό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$Α=\frac{3ημ(180^0-ω)+2συν(90^0-ω)}{4ημω-3ημ(180^0-ω)}$$

$$Β = συν(90^0 - 2ω)\cdot συν(180^0 - 2ω) + ημ2ω\cdot ημ(90^0 - 2ω)$$

Λύση

Ισχύει $ημ(180^0-ω)=ημω$, $συν(90^0-ω) = ημω$, $συν(90^0-2ω) = ημ2ω$
$συν(180^0-2ω) = -συν2ω$, $ημ(90^0-2ω) = συν2ω$. Οπότε έχουμε:

$$Α=\frac{3ημ(180^0-ω)+2συν(90^0-ω)}{4ημω-3ημ(180^0-ω)}=\frac{3ημω+2ημω}{4ημω-3ημω}=\frac{5ημω}{ημω}=5$$

$$Β= συν(90^0-2ω)\cdot συν(180^0-2ω)+ημ2ω\cdot ημ(90^0-2ω) =$$
$$ημ2ω\cdot(-συν2ω)+ημ2ω(συν2ω)=-ημ2ω\cdot συν2ω+ημ2ω\cdot συν2ω=0$$

2 Να βρείτε τη γωνία x όταν:

α) $ημx=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **β)** $(ημx+2)(2συνx+1)=0$

Λύση

α) Επειδή $ημ60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ θα έχουμε: $ημx=ημ60^0$ άρα $x=60^0$ ή $x=180^0-60^0$ ή $x=120^0$

β) $(ημx+2)(2συνx+1)=0$ ή $ημx+2=0$ ή $2συνx+1=0$ άρα $ημx=-2$ άτοπο ή $x=-\frac{1}{2}$. Επειδή $συν120=-\frac{1}{2}$ άρα $συνx=συν120$ άρα $x=120$.

3 Να υπολογίσετε: $ημ135^0$, $συν135^0$, $εφ150^0$.

Λύση

$ημ135^0=ημ(180-45^0)=ημ45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $συν135^0=συν(180-45^0)=-συν45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$εφ150^0=εφ(180-30^0)=-εφ30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4 Σε τρίγωνο ΑΒΓ αποδείξτε ότι ισχύει:
α) $ημ(Β+Γ)=ημΑ$, **β)** $συν(Β+Γ)+συνΑ=0$

Λύση

α) Ισχύει : $\hat{Α}+\hat{Β}+\hat{Γ}=180^0$, άρα οι γωνίες $\hat{Α}$, $\hat{Β}+\hat{Γ}$ είναι παραπληρωματικές

Οπότε $ημ(Β+Γ)=ημΑ$

β) $συν(Β+Γ)=-συνΑ$ ή $συν(Β+Γ)+συνΑ=0$.

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $ημ(Α+Β)=ημΓ$

2. Αν σε ένα τρίγωνο ισχύει $ημ(Α+Β)=1$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο

3. Αν $ημ138^0=0,66$, τότε $ημ42^0=0,66$

4. Αν $συνφ=ημ70^0$ και $0^0<φ<90^0$ τότε $φ=20^0$

5. Ο μεγαλύτερος από τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: ημ50^0, ημ189^0 είναι το ημ189^0

6. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας φ με $0^0 < φ < 90^0$ είναι όλοι θετικοί αριθμοί.

B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν ημφ = ημ45^0 τότε:
α) $φ = 45^0$, **β)** $φ = 135^0$, **γ)** $φ = 45^0$ ή 135^0, **δ)** καμία από τα παραπάνω.

2. Η εφ135^0 ισούται με:

α) 1 , **β)** -1, **γ)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **δ)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

3. Η παράσταση Α= ημ$120^0 \cdot$ συν55^0 + συν$125^0 \cdot$ ημ60^0 είναι ίση με:
α) 0, **β)** -1, **γ)** 1, **δ)** καμία από τα παραπάνω.

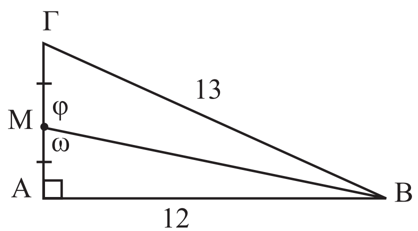
4. Αν $0^0 \leq x \leq 180^0$ και 2ημx= $\sqrt{2}$ τότε η τιμή του x είναι:
α) $x = 45^0$, **β)** $x = 135^0$, **γ)** $x = 45^0$ ή $x = 135^0$, **δ)** $x = 60^0$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να υπολογίσετε: ημ120^0, συν120^0, ημ135^0, συν150^0

2 Αν $0^0 \leq x \leq 180^0$, να υπολογίσετε το x όταν:
α) 4ημ^{2}x = 3, **β)** 2συν^{2}x = 1

3 Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και φ



4 Να αποδείξετε ότι:
α) $ημ(90^0 + x) = συνx$
β) $συν(90^0 + x) = -ημx$
γ) $εφ(90^0 + x) = -εφx$

5 Αν $90^0 \leq x \leq 180^0$ και το συνx είναι ρίζα της εξίσωσης $ω^2 - \frac{3}{2}ω - 1 = 0$, να υπολογίσετε τη γωνία x.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, να αποδειχθεί ότι:
α) $ημ(Α + Β) = ημΓ$, **β)** $συν(Α + Γ) + συνΒ = 0$, **γ)** $εφ(Α + Β) = -εφΓ$

7 Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $συν(Β + Γ) = 0$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο .

8 Αν $90^0 \leq x \leq 180^0$ να βρείτε τις τιμές του x:

α) $(ημx-2)(2ημx-1)=0$, **β)** $(συνx+2)(συνx+\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0$.

9 Αν $0^0 \leq x \leq 180^0$ και $6ημ^2x = ημx + 1$ να βρείτε το x.

10 Να αποδείξετε ότι: **α)** $ημ(150^0 + ω) = ημ(30^0 - ω)$,
β) $ημ(150^0 - ω) = ημ(30+ω)$ **γ)** $συν(140^0 + ω) = -συν(40^0 - ω)$,
δ) $συν(170^0 - ω) = -συν(10^0 + ω)$

11 Να αποδείξετε ότι: **α)** $ημ150^0 + συν165^0 + ημ75^0 - συν60^0 = 0$
β) $ημ89^0 + ημ91^0 - 2συν1^0 = 0$

12 Να τοποθετήσετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:
$ημ30^0$, $ημ140^0$, $συν\ 10^0$, $συν120^0$

13 Να βρείτε την οξεία γωνία ω που επαληθεύει κάθε μία από τις ισότητες:
α) $4ημφ = \frac{1}{ημφ}$, **β)** $4συνφ = \frac{3}{συνφ}$