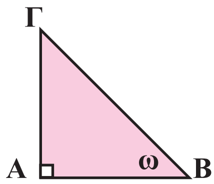
2.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας ω με $0^0 \leq \omega \leq 180^0$

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου, που γνωρίζουμε τις πλευρές του είναι: το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη που ορίζονται ως εξής:

$$\etaμ\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigmaυν\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$



Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ορίζονται και με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων ως εξής:

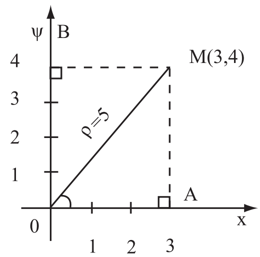
Αν σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οχψ πάρουμε ένα σημείο π.χ Μ(3,4) φέρουμε $MA \perp x'x$ και $MB \perp \psi'\psi$, τότε έχουμε ΟΑ = 3 και ΟΒ= ΑΜ= 4.

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $\omega = x\hat{O}M$ υπολογίζονται από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΜ
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΟΑΜ έχουμε : ΟΜ=ρ οπότε $\rho^2 = OA^2 + AM^2$ ή $\rho = \sqrt{3^2 + 4}$
ή ρ=5 . Άρα

$$\etaμ\omega = \frac{4}{5} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}},$$

$$\sigmaυν\omega = \frac{3}{5} = \frac{\text{τετμημένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{4}{3} = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}}$$



Παρατηρήσεις:

1) Αν δύο γωνίες είναι συμπληρωματικές δηλ είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου τότε: το ημίτονο της μιάς οξείας γωνίας είναι ίσο με το συνημίτονο της άλλης και το συνημίτονο της μιάς είναι ίσο με το ημίτονο της άλλης.

Δηλ. ισχύει: **ημ(90^0- ω) = συνω, συν(90^0 - ω) = ημω**

2) Όσο αυξάνει η οξεία γωνία αυξάνει το ημίτονο και η εφαπτομένη ενώ ελαττώνεται το συνημίτονο.

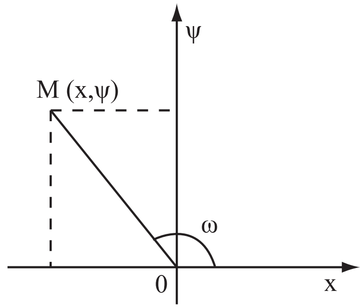
Με τη βοήθεια ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων μπορούμε να ορίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω όταν αυτή είναι αμβλεία.

Έστω έχουμε μία αμβλεία γωνία ω, τότε την τοποθετούμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Οxψ, έτσι ώστε η κορυφή της να συμπέσει με την αρχή Ο, η μία πλευρά της να συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα Οx και η άλλη πλευρά της να βρεθεί στο 2^0 τεταρτημόριο. Αν στην πλευρά αυτή πάρουμε ένα οποιοδήποτε σημείο Μ(x,ψ) διαφορετικό από το Ο, τότε για την απόσταση ρ = ΟΜ ισχύει: $\rho=\sqrt{x^2+\psi^2}$ και οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω είναι:

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{\psi}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{απόσταση του Μ από το Ο}} = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{τεταγμένη του Μ}}{\text{τετμημένη του Μ}} = \frac{\psi}{x}$$



Αν η γωνία είναι οξεία τότε: όλοι οι τριγωνομετρικοί της αριθμοί είναι θετικοί

Διότι : $x > 0$, $\psi > 0$, $\rho > 0$.

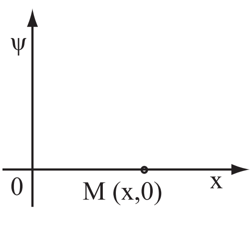
Αν η γωνία είναι αμβλεία τότε: μόνο το ημίτονο είναι θετικό ενώ οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι αρνητικοί.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 0^0, 90^0, 180^0 ως εξής:

α) Για τη γωνία 0^0

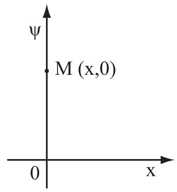
Έστω το σημείο Μ, τότε για να σχηματίζεται γωνία 0^0, πρέπει το Μ να είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Οx δηλ θα έχει την μορφή Μ(x,0) με $x > 0$, οπότε

$\rho=OM=x$,άρα $\eta\mu 0^0=\frac{\psi}{\rho}=\frac{0}{\rho}=0$, $\sigma\upsilon\nu 0^0=\frac{x}{\rho}=\frac{x}{x}=1$, $\varepsilon\varphi 0^0=\frac{\psi}{x}=\frac{0}{x}=0$.



β) Έστω το σημείο Μ τότε για να σχηματίζεται γωνία 90^0, πρέπει το Μ να είναι σημείο του θετικού ημιάξονα Οψ δηλ θα έχει την μορφή Μ(0,ψ) με ψ > 0,

$\rho = OM = \psi$, άρα $ημ90^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{\psi}{\psi} = 1$, $συν90^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$



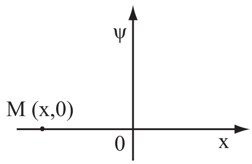
η $εφ90^0$ δεν ορίζεται διότι x = 0.

γ) Έστω το σημείο Μ τότε για να σχηματίζεται γωνία 180^0, πρέπει το Μ να είναι σημείο του αρνητικού ημιάξονα Οx′ δηλ θα έχει την μορφή Μ(x,0) με

x < 0 οπότε $\rho = OM = -x$, άρα $ημ180^0 = \frac{\psi}{\rho} = \frac{0}{\rho} = 0$,

$συν180^0 = \frac{x}{\rho} = \frac{x}{-x} = -1$,

$εφ180^0 = \; = \frac{0}{x} = 0$



Δίνουμε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών:
0^0, 30^0, 45^0, 60^0, 90^0

ω	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
ημω	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
συνω	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
εφω	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	δεν ορίζεται

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^0$. Αν ΑΒ=12 , ΒΓ=13 . Να βρείτε

α) ημΒ , συνΓ

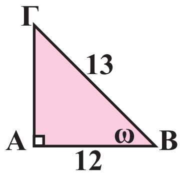
β) ημ(90^0-Γ) , εφΒ

Λύση

α) Θα βρούμε με το πυθαγόρειο θεώρημα την κάθετη πλευρά ΑΓ .

$A\Gamma^2=B\Gamma^2-AB^2$ ή $A\Gamma^2=13^2-12^2$ ή $A\Gamma^2=169-144$ ή $A\Gamma^2=25$ ή ΑΓ=5 .

Οπότε ημΒ=$\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ ή ημΒ=$\frac{5}{B}$, συνΓ = $\frac{AB}{B\Gamma}$ ή συνΓ=$\frac{12}{13}$



β) ημ(90^0-Γ)=συνΓ=$\frac{12}{13}$, εφΒ=$\frac{A\Gamma}{AB}=\frac{5}{12}$

2 Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω= $x\hat{O}M$, όταν: **α)** Μ(-6,8), **β)** Μ(-4,0), **γ)** Μ (0,5)

Λύση

α) Για την απόσταση ΟΜ=ρ έχουμε : ρ=$\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{(-6)^2+8^2}=\sqrt{100}=10$.

Άρα : ημω=$\frac{\psi}{\rho}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$, συνω=$\frac{x}{\rho}=\frac{-6}{10}=-\frac{3}{5}$, εφω=$\frac{\psi}{x}=\frac{8}{-6}=-\frac{4}{3}$.

β) Για την απόσταση ΟΜ=ρ έχουμε : ρ=$\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{(-4)^2+0^2}=4$.

Άρα : ημω=$\frac{\psi}{\rho}=\frac{0}{4}=0$, συνω=$\frac{x}{\rho}=\frac{-4}{4}=-1$, εφω=$\frac{\psi}{x}=\frac{0}{4}=0$

γ) Για την απόσταση ΟΜ=ρ έχουμε : ρ=$\sqrt{x^2+\psi^2}=\sqrt{0^2+5^2}=5$

Άρα : ημω=$\frac{\psi}{\rho}=\frac{5}{5}=1$, συνω=$\frac{x}{\rho}=\frac{0}{5}=0$, η εφω δεν ορίζεται .

3 Να υπολογιστούν οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$) όταν : ΑΓ=6 cm και ημΒ= $\frac{3}{5}$.

Λύση

Είναι ημΒ= $\frac{3}{5}$ ή $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}=\frac{3}{5}$ ή $\frac{6}{B\Gamma}=\frac{3}{5}$ ή 3ΒΓ =30 ή ΒΓ=10 cm .

Στο τρίγωνο ΑΒΓ εφαρμόζω το Πυθαγόρειο θεώρημα και παίρνουμε :

$B\Gamma^2=A\Gamma^2+AB^2$ ή $10^2=6^2+AB^2$ ή $AB^2=64$ ή ΑΒ=8 cm .

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας είναι καθαροί αριθμοί

2. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει $ημω = α^2 + 2$, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

3. Υπάρχει γωνία ω για την οποία ισχύει εφω = 1000

4. Ισχύει $\frac{ημ\,20^0}{συν70^0}=1$

5. Η διαφορά $συν85^0 - συν75^0$ έχει θετικό πρόσημο.

6. Η διαφορά $εφ150^0 - εφ20^0$ έχει αρνητικό πρόσημο

7. Ισχύει $2\cdot ημ30^0 = ημ60^0$

8. Αν $ω + φ = 90^0$ τότε ημ2ω = συν2φ

9. Το γινόμενο $ημ45^0 \cdot συν152^0$ είναι θετικός αριθμός.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^0$) ισχύει: ΒΓ= 20cm, , $συνΒ=\frac{3}{10}$ τότε η πλευρά ΑΒ είναι:
α. 6 cm, **β.** 3 cm, **γ.** 12 cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω .

2. Η παράσταση $\frac{ημ\,3^0}{συν\,87^0} - \frac{συν\,87^0}{ημ\,3^0}$ είναι ίση με:
α. 0, **β.** 2, **γ.** 2, **δ.** δεν προσδιορίζεται .

3. Δίνεται ότι ισχύει: ημx + ημψ = 2. Τότε μπορεί να ισχύει:
α. ημx = 2,5 και ημψ = -0,5, **β.** ημx = 1 και ημψ = 1, **γ.** ημx = 0,5 και ημψ = 1,5 **δ.** Τίποτα από τα παραπάνω.

4. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOψ, για ένα σημείο Μ ισχύει $συν(x\hat{O}M) > 0$. Τότε η ΟΜ μπορεί να διέρχεται από το σημείο:
α. (1,3), **β.** (-1,4), **γ.** (0,4) **δ.** (-2,5)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α = 4cm. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: 30^0, 60^0.

2 Να τοποθετήσετε σε ορθοκανονοκό σύστημα αξόνων τα σημεία Α(4,3), Β(-2,0), Γ(-3,4). Να υπολογίσετε ημ$x\hat{O}A$, συν$x\hat{O}B$, εφ$x\hat{O}Γ$.

3 Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση: $2x + 3ψ = 6$

α) Να κάνετε την γραφική της παράσταση και να βρείτε το σημείο Μ που έχει τεταγμένη 4.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $ω = x\hat{O}M$

4 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α= 90^0$). Να αποδείξετε ότι:

α) ημΒ < εφΒ **β)** $\dfrac{ημΒ}{ημΓ}=\dfrac{β}{γ}$

5 Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$A = ημ17^0 + ημ35^0 - συν73^0 - συν55^0$

$$B=\frac{συν\ 56^0}{ημ\ 34^0}+\frac{ημ\ 50^0}{συν\ 40^0}-4$$

6 Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων

$A = 3ημω + 5$, $B = 4 - 2συνω$

7 **α)** Να κατασκευασθεί μία γωνία γνωρίζοντας ότι: $εφA=\dfrac{4}{5}$

β) Να κατασκευασθεί μία γωνία ω τέτοια ώστε: $ημ(90^0 - ω) = 0,8$

8 Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($Α = 90^0$), να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

α) ημΒ + ημΓ = συνΒ + συνΓ

β) ημΒ · συνΓ = ημΓ· συνΒ

9 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:

α) $ημ38^0$,$ημ65^0$

β) $συν87^0$, $συν10^0$

γ) $εφ25^0$, $εφ89^0$

δ) $ημ10^0$, $συν30^0$