4.2 Η συνάρτηση $ψ = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

Μία συνάρτηση ονομάζεται τετραγωνική όταν έχει την μορφή
$ψ = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$.

Γενικά: Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $ψ = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ είναι παραβολή με:

- **Κορυφή** το σημείο $Κ\left(-\frac{β}{2α}, -\frac{Δ}{4α}\right)$, όπου Δ η διακρίνουσα.
- **Άξονα συμμετρίας** την κατακόρυφη ευθεία που διέρχεται από την κορυφή Κ και έχει εξίσωση $x=-\frac{β}{2α}$

Γενικά: Αν $α > 0$, η συνάρτηση $ψ = αx^2 + βx + γ$ παίρνει ελάχιστη τιμή $ψ= -\frac{Δ}{4α}$, όταν $x=-\frac{β}{2α}$

Αν $α< 0$, η συνάρτηση $ψ = α x^2+βx+γ$ παίρνει μέγιστη τιμή $ψ = -\frac{Δ}{4α}$ όταν $x=-\frac{β}{2α}$.

Παρατηρήσεις:

α) Η γραφική παράσταση της $ψ = αx^2 + κ$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $ψ = αx^2$ αν μεταφερθεί: **i)** κ μονάδες προς τα πάνω αν $κ > 0$ **ii)** κ μονάδες προς τα κάτω αν $κ < 0$. Δεν υπάρχει οριζόντια μετατόπιση.

β) Η γραφική παράσταση της $ψ = α(x-κ)^2$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της $ψ = αx^2$ αν μεταφερθεί: **i)** κ μονάδες δεξιά αν $κ > 0$ **ii)** κ μονάδες αριστερά αν $κ<0$. Δεν υπάρχει κατακόρυφη μετατόπιση.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η παραβολή $ψ = x^2 -(λ -2) x -3$.

α) Να δείξετε ότι έχει ελάχιστο για κάθε $λ \in R$.

β) Αν η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την $x = 1$ να βρείτε το αριθμό λ.

γ) Για την τιμή του που βρήκατε στο β) ερώτημα να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες.

Λύση

α) Επειδή $\alpha = 1 > 0$ η παραβολή θα έχει ελάχιστο για κάθε $\lambda \in R$.

β) Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\alpha \neq 0$ έχει άξονα συμμετρίας την $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

οπότε: $1 = -\dfrac{-(\lambda - 2)}{2}$ ή $2 = \lambda - 2$ ή $\lambda = 4$

γ) Για $\lambda = 4$ η παραβολή γίνεται: $\psi = x^2 - 2x - 3$.

Για τον άξονα x′x: θέτω $\psi = 0$ οπότε $x^2 - 2x - 3 = 0$. Είναι $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = -3$ $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 4 + 12 = 16 > 0$.

Άρα έχουμε δύο ρίζες τις

$x_{1,2} = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ ή $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$, άρα $x = \dfrac{2+4}{2} = 3$ ή $x = \dfrac{2-4}{2} = -1$.

Οπότε τέμνει τον x′x στα Α(3,0), Β (-1,0)

Για τον άξονα ψ′ψ: θέτω $x = 0$ οπότε: $\psi = -3$. Άρα τέμνει τον ψ′ψ στο Γ(0,-3)

2. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 20. Να δείξετε ότι:

α) Αν ο ένας είναι ο x τότε το γινόμενό τους δίνεται: $-x^2 + 20x$

β) Να βρείτε τους αριθμούς όταν το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο. Ποιο είναι το μέγιστο γινόμενο.

Λύση

α) Αν ο ένας είναι ο x τότε ο άλλος θα είναι ο 20 -x. Έτσι για το γινόμενο έχουμε: $x(20 - x) = 20x - x^2 = -x^2 + 20x$.

β) Θεωρώ την παραβολή $\psi = -x^2 + 20x$. Επειδή $\alpha = -1 < 0$ έχουμε μέγιστο για

$x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ή $x = -\dfrac{20}{-2} = 10$ Άρα το γινόμενο γίνεται μέγιστο όταν ο ένας αριθμός είναι ο 10 και ο άλλος 10. Το μέγιστο γινόμενο θα είναι: $10 \cdot 10 = 100$.

3. Δίνεται η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τους αριθμούς α, β, γ ώστε η παραβολή να έχει κορυφή το σημείο Α(0,4) και να τέμνει τον x′x στο σημείο Β(-2,0).

Λύση

Η παραβολή έχει κορυφή το σημείο Α(0,4) , άρα $4 = \gamma$ (1) . Έχει κορυφή το $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$ οπότε : $0 = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$ ή $\beta = 0$ (2) . Περνάει από το (-2,0) οπότε :

$0 = \alpha \cdot (-2)^2 + 0 \cdot (-2) + 4$ ή $0 = 4\alpha + 4$ ή $\alpha = -1$ (3)

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η συνάρτηση $ψ = (α^2 + 1)x^2 + 3x - 6$ παίρνει ελάχιστη τιμή.

2. Η παραβολή $ψ = x^2 - 4$ έχει άξονα συμμετρίας τη ευθεία $x = -2$

3. Δίνεται η παραβολή $ψ = αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$. Οι τιμές της διακρίνουσας καθορίζουν το είδος του ακροτάτου.

4. Η παραβολή $ψ = x(1 - x) + 2x + 6$ έχει ελάχιστο.

5. Η παραβολή $ψ = 3x^2 - x(3 + 4x) + 2$ έχει ελάχιστο.

6. Οι παραβολές $ψ = x^2 - 4x + 1$, $ψ = -2x^2 + 8x + 10$ έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

7. Η παραβολή $ψ = (x-2)^2$ προκύπτει από την γραφική παράσταση της παραβολής $ψ = x^2$, αν μεταφερθεί 2 μονάδες προς τα πάνω.

8. Δίνεται η παραβολή $ψ = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$. Αν $Δ = 0$ τότε η κορυφή της βρίσκεται στον $ψ'ψ$.

9. Η παραβολή $ψ = x^2 + 5$ προκύπτει από τη γραφική παράσταση της παραβολής αν μεταφερθεί 5 μονάδες προς τα πάνω.

10. Η παραβολή $ψ = 2x^2 + 6x + 8$ έχει ελάχιστο το $x = -\frac{3}{2}$

11. Η παραβολή $-x^2 - 2ψ = 3$ έχει μέγιστο.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται η παραβολή $ψ = (α - 3)x^2 - 3αx + α - 1$ $α \neq 3$. Για ποια τιμή του α η παραβολή έχει μέγιστο.
α. $α > 3$, **β.** $α < 3$, **γ.** $α > 0$ **δ.** $α < 0$.

2. Η παραβολή $ψ = αx^2 + α^2x + γ$ με $α \neq 0$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία.

α. $x=1$ **β.** $x=\alpha$, $x=-\frac{\alpha}{2}$ **γ.** $x=\frac{\alpha}{2}$, **δ.** $x=-\alpha$

3. Δύο αριθμοί έχουν άθροισμα 10. Το μέγιστο γινόμενό τους είναι
α. 20 **β.** 100 **γ.** –20 **δ.** –100

4. Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν:
α. $\gamma = 0$, **β.** $\alpha > 0$, **γ.** $\alpha < 0$, **δ.** $\beta = 0$

5. Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει κορυφή την αρχή των αξόνων αν:
α. $\alpha > 0$, **β.** $\alpha<0$, **γ.** $\beta = \gamma = 0$ **δ.** $\beta > 0$

6. Η παραβολή $\psi = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ έχει την κορυφή στον $x'x$ τότε:
α. $\beta = 0$, **β.** $\gamma = 0$ **γ.** $\beta^2 = 4\alpha\gamma$, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να σχεδιάσετε τις παραβολές:
α) $\psi = x^2 + 3$, **β)** $\psi = x^2 - 4$, **γ)** $\psi = (x + 2)^2$, **δ)** $\psi = (x - 1)^2$

2 Να βρείτε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης.
α) $\psi = -x^2 - 4x + 2$ **β)** $\psi = (x - 1)^2 + 3$

3 Δίνεται η συνάρτηση $\psi = x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda)x + 2$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση έχει ελάχιστο
β) Αν η συνάρτηση έχει ελάχιστο για $x = -1$ να βρείτε το λ.
γ) Για την μεγαλύτερη τιμή του λ να βρείτε το ελάχιστο

4 Δίνεται η παραβολή $\psi = 2x^2 - (\lambda - 1)x + 1$. Αν η κορυφή της παραβολής βρίσκεται στον $\psi'\psi$ να βρείτε το λ.

5 Δίνεται η παραβολή $\psi = 2x^2 + (\lambda - 1)x + 6$.
α) Για ποια τιμή του λ η παραβολή έχει άξονα συμμετρίας την $x = -1$
β) Για την τιμή του λ του α) ερωτήματος να βρείτε το ελάχιστο

6 Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η παραβολή $\psi = -x^2 + \alpha x + \beta$, για $x = 4$ να παρουσιάζει μέγιστο το 6

7 Δύο θετικοί αριθμοί έχουν άθροισμα 10. Να βρείτε τους αριθμούς αν
α) Το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο .
β) Το άθροισμα των τετραγώνων τους γίνεται ελάχιστο.

8 Αν x, ψ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί με 2x + ψ = 5. Να βρείτε το μέγιστο της παράστασης Α = x ψ + 5

9 Δίνονται οι παραβολές $ψ = -x^2 + αx + 1$, $ψ = x^2 - 3x + 2$. Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του α ώστε οι κορυφές των δύο παραβολών να ταυτίζονται.

10 Δίνεται η παραβολή: $ψ = x^2 -(λ + 2)x - λ + 1$, λ R .
α) Να εξετάσετε αν η παραβολή έχει ελάχιστο ή μέγιστο το οποίο και να βρείτε.
β) Αν η παραβολή έχει ελάχιστο να βρείτε το λ ώστε το ελάχιστο της παραβολής να γίνεται μέγιστο.

11 Ένας παραγωγός καλλιεργεί x (σε δεκάδες) στρέμματα με ροδάκινα. Για την καλλιέργεια των x στρεμμάτων έχει έξοδα 2x + 7 (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Τα έσοδα του παραγωγού είναι x (σε δεκάδες) ευρώ το στρέμμα. Να βρείτε πόσα στρέμματα πρέπει να καλλιεργήσει ώστε να έχει μέγιστο κέρδος.

Γενικές ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1 Δίνονται οι παραβολές $ψ = x^2 -(λ -1)x + 2$, $ψ = -2x^2 +(3λ -2)x + 6$.
α) Να δείξετε ότι η πρώτη παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο για κάθε λ, ενώ η δεύτερη παραβολή παρουσιάζει μέγιστο για κάθε λ.
β) Να βρείτε την τιμή του ώστε οι δύο παραβολές να έχουν τον ίδιο άξονα συμμετρίας.

2 Δίνεται η παραβολή $ψ = x^2 - λx + λ - 1$. Να βρείτε το λ ώστε η κορυφή της παραβολής να ανήκει στην ευθεία x + 2ψ - 4 = 0

3 Αν για τους θετικούς αριθμούς x, ψ ισχύει: 2x + ψ = 5 (1).Να βρείτε τους αριθμούς ώστε το γινόμενο x · ψ να γίνεται μέγιστο.

4 Να βρεθούν δύο αριθμοί ώστε να έχουν άθροισμα 20 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.