

## 4.1 Η συνάρτηση $\psi = ax^2$ με $a \neq 0$

Συνάρτηση λέμε μία ισότητα που συνδέει δύο μεταβλητές  $x$  και  $\psi$  και σε κάθε τιμή του  $x$  αντιστοιχίζεται μία μόνο τιμή του  $\psi$ .

Αν σε ένα σύστημα αξόνων, παραστήσουμε με σημεία τα ζεύγη  $(x, \psi)$ , όπου  $\psi$  είναι η αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης για μία τιμή του  $x$ , τότε το σύνολο των σημείων αυτών αποτελεί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

**Η συνάρτηση  $\psi = ax^2$  με  $a \neq 0$ .**

- Έχει γραφική παράσταση που είναι παραβολή με κορυφή το σημείο  $O(0,0)$  και άξονα συμμετρίας τον άξονα  $\psi/\psi$ .
- Αν  $a > 0$ , τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x'x$  και πάνω και η συνάρτηση παίρνει ελάχιστη τιμή  $\psi = 0$ , όταν  $x = 0$
- Αν  $a < 0$ , τότε η παραβολή βρίσκεται από τον άξονα  $x'x$  και κάτω και η συνάρτηση παίρνει μέγιστη τιμή  $\psi = 0$ , όταν  $x = 0$

### Παρατηρήσεις:

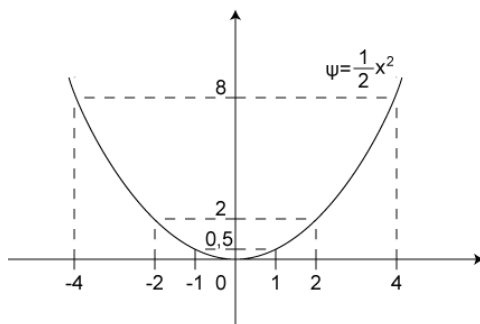
- α)** Ο συντελεστής  $a$  καθορίζει: i) Την θέση της παραβολής  $\psi = ax^2$  ως προς τον άξονα  $x'x$  ii) Το άνοιγμά της. Όταν η απόλυτη τιμή του  $a$  αυξάνεται τότε η παραβολή κλείνει δηλαδή πλησιάζει προς τον άξονα  $\psi/\psi$
- β)** Οι παραβολές  $\psi = ax^2$  και  $\psi = -ax^2$  είναι συμμετρικές ως προς άξονα συμμετρίας τον  $x'x$ .
- γ)** Για να κάνουμε την γραφική παράσταση της  $\psi = ax^2$  κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για διάφορες τιμές του  $x$ .

Έτσι αν θέλουμε να κάνουμε την γραφική παράσταση της παραβολής:

$\psi = \frac{1}{2}x^2$  κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του  $x$ .

$x$	-4	-2	-1	0	1	2	4
$\psi$	8	2	0,5	0	0,5	2	8

Και η γραφική παράσταση δίνεται:



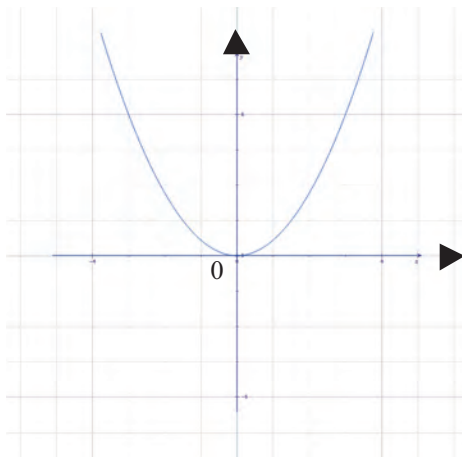
- 1.** α) Να βρεθεί η τιμή του  $a$ , ώστε η παραβολή  $\psi = ax^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2,4)$   
 β) Για την τιμή του  $a$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να σχεδιάσετε την παραβολή

**Λύση**

- α) Η παραβολή περνάει από το  $A(-2,4)$  άρα:  $4 = a(-2)^2$  ή  $4 = 4a$   
 οπότε  $a = 1$   
 β) Για  $a = 1$  η παραβολή είναι:  $\psi = x^2$   
 Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για τις διάφορες τιμές του  $x$ .

$x$	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\psi$	9	4	1	0	1	4	9

Η Γραφική παράσταση δίνεται.



- 2.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (a + 1)x^2$  με  $a \neq -1$ .  
 α) Αν η παραβολή έχει μέγιστο να βρείτε την τιμή του  $a$ .  
 β) Να βρείτε την τιμή του  $a$  όταν είναι συμμετρική ως προς τον  $x'$  με την  $\psi = 4x^2$

**Λύση**

- α) Η παραβολή έχει μέγιστο όταν:  $a + 1 < 0$  ή  $a < -1$   
 β) Οι παραβολές είναι συμμετρικές ως προς τον  $x'$  όταν  $a + 1 = -4$   
 οπότε  $a = -5$ .

**3.** Δίνονται οι παραβολές  $\psi = \left(\alpha + \frac{3}{2}\right)x^2$  και  $\psi = \left(\frac{\alpha}{2} + 2\right)x^2$  με  $\alpha > 0$ .

Αν η γραφική παράσταση της πρώτης παραβολής είναι πιο κοντά στον άξονα  $\psi'$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

**α)** Να βρεθεί η τιμή του  $\alpha$ , ώστε η παραβολή  $\psi = \alpha x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(-2,4)$

**β)** Για την τιμή του  $\alpha$  που βρήκατε στο α) ερώτημα να σχεδιάσετε την παραβολή

**Λύση**

Πρέπει:  $\alpha + \frac{3}{2} < \frac{\alpha}{2} + 2$  ή  $2\alpha + 3 < \alpha + 4$  ή  $\alpha < 1$ . Άρα  $0 < \alpha < 1$

### Ερωτήσεις κατανόησης

**A.** Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η παραβολή  $\psi = -x^2$  έχει άξονα συμμετρίας τον  $x'$ .
2. Η παραβολή  $\psi = (\lambda^2 + 1)x^2$  έχει μέγιστο.
3. Οι παραβολές  $\psi = (\alpha^2 + 1)x^2$ ,  $\psi = -(\alpha^2 + 1)x^2$  είναι συμμετρικές ως προς το  $\psi'$ .
4. Η παραβολή  $\psi = 3x^2$  έχει μέγιστο το  $(0,0)$ .
5. Αν η παραβολή  $\psi = (\alpha + 1)2007x^2$ ,  $\alpha \neq -1$  διέρχεται από το  $A(-3,8)$ , τότε διέρχεται και από το  $B(3,8)$ .
6. Οι παραβολές  $\psi = -2x^2$ ,  $\psi = 6x^2$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
7. Η γραφική παράσταση της παραβολής  $\psi = -3x^2$  είναι πάντα κάτω από τον  $x'$ .

## B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Για ποιά τιμή του  $a$  η παραβολή  $\psi = (a + 1)x^2$  διέρχεται από το  $A(-2,4)$   
**α.**  $a = 0$ , **β.**  $a = -1$  **γ.**  $a = 2$  **δ.**  $a = -3$  **ε.**  $a = 4$
2. Δίνεται η παραβολή  $\psi = (a + 2)x^2$ . Η γραφική της παράσταση βρίσκεται από τον  $x'$  και κάτω όταν:  
**α.**  $a < 0$ , **β.**  $a < -1$  **γ.**  $a < -2$  **δ.**  $a > 0$  **ε.**  $a > -2$
3. Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\lambda - 2)x^2$ . Η παραβολή έχει μέγιστο όταν:  
**α.**  $\lambda = 2$ , **β.**  $\lambda > 2$ , **γ.**  $\lambda < 2$ , **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.
4. Οι παραβολές  $\psi = \lambda x^2$ ,  $\lambda \neq 0$  και  $\psi = 3x^2$  είναι συμμετρικές ως προς τον  $x'$  όταν:  
**α.**  $\lambda = 3$ , **β.**  $\lambda = -3$ , **γ.**  $\lambda < 3$ , **δ.**  $\lambda > 3$
5. Αν μία παραβολή με  $x \in \mathbb{R}$  διέρχεται από το  $(-1,3)$  τότε σίγουρα θα διέρχεται από το:  
**α.**  $(1, 3)$ , **β.**  $(-1,3)$  **γ.**  $(3,1)$  **δ.**  $(-3,1)$

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να σχεδιάσετε τις παραβολές  
**α)**  $\psi = -x^2$  αν  $-2 < x \leq 1$ , **β)**  $\psi = \frac{1}{2}x^2$  αν  $-4 \leq x \leq 4$
2. Να σχεδιάσετε τις παραβολές  
**α)**  $\psi = -x^2$  αν  $-2 < x \leq 1$ , **β)**  $\psi = x^2$  αν  $-4 \leq x \leq 4$
3. Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η παραβολή  $\psi = (a + 2)x^2$  να διέρχεται από το σημείο  $A(1,4)$ . Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της συμμετρικής της ως προς τον  $x'$ .
4. Δίνεται η παραβολή  $\psi = \left(\frac{\lambda + 1}{2} - 4\lambda\right)x^2$ . Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε η παραβολή να έχει μέγιστο.

- 5.** Δίνονται οι παραβολές  $\psi = (\alpha + \frac{1}{3})x^2$ ,  $\psi = (2\alpha - 1)x^2$ . Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$  ώστε: **α)** Οι γραφικές παραστάσεις των παραβολών να ταυτίζονται.  
**β)** Να είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x'x$ .
- 6.** Δίνεται η παραβολή  $\psi = (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2$   
**α)** Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η παραβολή να διέρχεται από το  $A(1,6)$   
**β)** Για τη μεγαλύτερη τιμή του  $\lambda$  του  $\alpha$ ) ερωτήματος να κάνετε τη γραφική παράσταση.
- 7.** Δίνονται οι παραβολές  $\psi = (\alpha^2 + 4\alpha + 4)x^2$ ,  $\psi = (\alpha^2 - 2\alpha + 1)x^2$   
με  $\alpha \neq -2$ ,  $\alpha \neq 1$ .  
Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις τιμές του  $\alpha$  ώστε η γραφική παράσταση της πρώτης παραβολής να είναι πιο μακριά από τον άξονα  $\psi'\psi$ .