3.3 Αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος

Η γραφική επίλυση ενός συστήματος δεν οδηγεί πάντοτε στον ακριβή προσδιορισμό της λύσης του, αφού σε ορισμένες περιπτώσεις οι συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών του δεν είναι εύκολο να προσδιοριστούν.
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα,επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μία εξίσωση τον έναν από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο. Έχουμε δύο μεθόδους που αυτό επιτυγχάνεται.

α) Μέθοδος αντικατάστασης: Δουλεύουμε ως εξής:

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράστασή του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στη προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

β) Μέθοδος των αντίθετων συντελεστών: Δουλεύουμε ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' έναν από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε.
- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο την οποία και λύνουμε.
- Αντικαθιστούμε την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε σε μία από τις δύο εξισώσεις του συστήματος, οπότε βρίσκουμε την τιμή και του άλλου αγνώστου.
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν ένα σύστημα έχει την μορφή: $\begin{cases} \alpha_1 x+\beta_1 \psi=\gamma_1 \\ \alpha_2 x+\beta_2 \psi=\gamma_2 \end{cases}$

Τότε ισχύουν **α)** Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} \neq \dfrac{\beta_1}{\beta_2}$, τότε το σύστημα έχει μία λύση.

β) Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} \neq \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$, τότε το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Αν $\dfrac{\alpha_1}{\alpha_2} = \dfrac{\beta_1}{\beta_2} = \dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$, τότε το σύστημα είναι αόριστο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα με την μέθοδο της αντικατάστασης

α) $\begin{cases} x+4\psi=5 \\ 2x-4\psi=-2 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x+\psi=7 \\ 3x+4\psi=3 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x+2\psi=2 \\ x-2\psi=14 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 4x+5\psi=-2 \\ 2x-\psi=6 \end{cases}$

Λύση

α) Λύνουμε την εξίσωση $x + 4\psi = 5$ ως προς x και έχουμε: $x = 5 - 4\psi$. Αντικαθιστούμε το x με $5 - 4\psi$ στην εξίσωση $2x - 4\psi = -2$ και έχουμε: $2(5 - 4\psi)- 4\psi = -2$ ή $10 - 8\psi - 4\psi = -2$ ή $10 - 12\psi = -2$ ή $-12\psi = -2-10$ ή $-12\psi = -12$ ή $\psi = 1$. Για $\psi = 1$ από την εξίσωση $x = 5 - 4\psi$ έχουμε $x = 5 - 4 \cdot 1$ ή $x = 1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 1$ και $\psi = 1$, δηλαδή το ζεύγος $(x, \psi) = (1,1)$

β) Λύνουμε την εξίσωση $2x + \psi = 7$ ως προς ψ και έχουμε: $\psi = 7 - 2x$. Αντικαθιστούμε το ψ με $7 - 2x$ στην εξίσωση $3x + 4\psi = 3$ και έχουμε: $3x + 4(7 - 2x) =3$ ή $3x + 28 - 8x = 3$ ή $3x - 8x = 3 - 28$ ή $-5x = -25$ ή $x = 5$. Για $x = 5$ από την εξίσωση $\psi = 7 - 2x$ έχουμε: $\psi = 7 -2 \cdot 5$ ή $\psi = 7 - 10$ ή $\psi = -3$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 5$ και $\psi = -3$, δηλαδή το ζεύγος $(x, \psi) = (5, -3)$

γ) Λύνουμε την εξίσωση $x -2\psi = 14$ ως προς x και έχουμε $x = 14 + 2\psi$. Αντικαθιστούμε το x με $x = 14 + 2\psi$ στην εξίσωση $3x + 2\psi = 2$ και έχουμε:
$3(14 + 2\psi) + 2\psi = 2$ ή $42 + 6\psi + 2\psi = 2$ ή $8\psi = 2 - 42$ ή $8\psi = -40$ ή $\psi = -5$. Για $\psi = -5$ από την εξίσωση $x = 14 + 2\psi$ έχουμε: $x =14 + 2 \cdot(-5)$ ή $x = 14 - 10$ ή $x = 4$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 4$ και $\psi = -5$, δηλαδή το ζεύγος $(x, \psi) = (4, -5)$

δ) Λύνουμε την εξίσωση $2x -\psi = 6$ ως προς ψ και έχουμε $\psi = 2x -6$. Αντικαθιστούμε το ψ με $\psi = 2x - 6$ στην εξίσωση $4x + 5\psi = -2$ και έχουμε: $4x + 5(2x - 6)= -2$ ή $4x + 10x -30 = -2$ ή $14x = 30 - 2$ ή $14x = 28$ ή $x = 2$.Για $x=2$ από την εξίσωση $\psi = 2x - 6$ έχουμε: $\psi = 2 \cdot 2 -6$ ή $\psi = -2$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$ και $\psi = -2$, δηλαδή το ζεύγος $(x, \psi) = (2,-2)$

2 Να λύσετε με την μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών τα συστήματα

α) $\begin{cases} 2x-5\psi=-3 \\ 3x+5\psi=8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 4x+3\psi=2 \\ -4x+2\psi=-12 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x-5\psi=1 \\ 2x+3\psi=7 \end{cases}$

Λύση

α) Οι συντελεστές του ψ είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη, τότε ό άγνωστος ψ απαλείφεται. Έτσι έχουμε $2x + 3x = -3 + 8$ ή $5x = 5$ ή $x = 1$. Αντικαθιστούμε την τιμή του x σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ . στην δεύτερη και έχουμε: $3 \cdot 1 + 5ψ = 8$ ή $5ψ = 8 - 3$ ή $5ψ = 5$ ή $ψ = 1$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x=1$ και $ψ=1$,δηλαδή το ζεύγος $(x,ψ)=(1,1)$

β) Οι συντελεστές του x είναι αντίθετοι αριθμοί και αν προσθέσουμε τις εξισώσεις κατά μέλη, τότε ό άγνωστος x απαλείφεται. Έτσι έχουμε $3ψ + 2ψ = -10$ ή $5ψ=-10$ ή $ψ=-2$. Αντικαθιστούμε την τιμή του ψ σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ. στην πρώτη και έχουμε: $4x + 3 \cdot (-2) = 2$ ή $4x - 6 = 2$ ή $4x = 6 + 2$ ή $4x = 8$ ή $x = 2$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$ και $ψ = -2$,δηλαδή το ζεύγος $(x, ψ) = (2, -2)$

γ) Θα κάνουμε απαλοιφή του αγνώστου που θέλουμε, π.χ. το x. Οπότε πολλαπλασιάζουμε τα μέλη της πρώτης εξίσωσης με 2 και της δεύτερης με -3 οπότε έχουμε:

$$\left\{\begin{array}{l|l} 3x-5ψ=1 & 2 \\ 2x+3ψ=7 & -3 \end{array}\right. \quad ή \quad \left\{\begin{array}{l} 6x-10ψ = 2 \\ -6x-9ψ=-21 \end{array}\right.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη $-10ψ -9ψ = 2 -21$ ή $-19ψ = -19$ ή $ψ = 1$. Αντικαθιστούμε την τιμή του ψ σε μία από τις δύο εξισώσεις π.χ. στην πρώτη και έχουμε:
$3x - 5 \cdot 1 = 1$ ή $3x = 1 + 5$ ή $3x = 6$ ή $x = 2$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 2$ και $ψ = 1$, δηλαδή το ζεύγος $(x, ψ) = (2,1)$.

3 Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4x-1}{3} + 2ψ=3 \\ \dfrac{3-2x}{5} + \dfrac{3x+ψ}{5} =1 \end{array}\right.$ **β)** $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{2}{α}+\dfrac{3}{β}=13 \\ \dfrac{3}{α}-\dfrac{1}{β}=3 \end{array}\right.$ **γ)** $\left\{\begin{array}{l} \sqrt{α}+2\sqrt{β}=8 \\ 3\sqrt{α}-\sqrt{β}=3 \end{array}\right.$ **δ)** $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{α}{2}=\dfrac{β}{3} \\ α-2β=6 \end{array}\right.$

Λύση

α) Για να απλουστευθούν οι εξισώσεις, κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών και έχουμε:

α) $\begin{cases} 3\cdot\dfrac{4x-1}{3} + 3\cdot 2\psi = 3\cdot 3 \\ 5\cdot\dfrac{3-2x}{5} + 5\cdot\dfrac{3x+\psi}{5} = 5\cdot 1 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 4x-1+6\psi=9 \\ 3-2x+3x+\psi=5 \end{cases}$ ή $\begin{cases} 4x+6\psi=10 \\ x+\psi=2 \end{cases}$

Λύνουμε ως προς x την εξίσωση $x + \psi = 2$ και έχουμε: $x = 2 - \psi$.
Αντικαθιστούμε στην $4x + 6\psi = 10$ το x και έχουμε: $4(2 - \psi) + 6\psi = 10$
ή $8 - 4\psi + 6\psi = 10$ ή $-4\psi + 6\psi = 10 - 8$ ή $2\psi = 2$ ή $\psi = 1$. Άρα $x = 2 - 1 = 1$.
Άρα η λύση του συστήματος είναι $x = 1$ και $\psi = 1$ δηλαδή το ζεύγος $(x, \psi) = (1,1)$.

β) Θέτω $\dfrac{1}{\alpha} = x$, $\dfrac{1}{\beta} = \psi$ άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα $\begin{cases} x+3\psi=13 \\ x-\psi = 3 \end{cases}$

Λύνω την εξίσωση $3x-\psi=3$ ως προς ψ και έχουμε : $\psi=3x-3$. Αντικαθιστούμε στην $2x+3\psi=13$ το ψ και έχουμε : $2x+3(3x-3)=13$ ή $2x+9x-9=13$ ή $11x=22$ ή $x=2$. Άρα $\psi=3\cdot 2-3 =3$. Οπότε $\dfrac{1}{\alpha}=2$ ή $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\dfrac{1}{\beta}=3$ ή $\beta=\dfrac{1}{3}$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $\alpha=\dfrac{1}{2}$ και $\beta=\dfrac{1}{3}$ δηλαδή το ζεύγος $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$

γ) Θέτω $\sqrt{\alpha} = x \geq 0$ και $\sqrt{\beta} = \psi \geq 0$, άρα έχουμε το ισοδύναμο σύστημα

$\begin{cases} x+2\psi=8 \\ 3x-\psi=3 \end{cases}$

Λύνω την εξίσωση $x+2\psi=8$ ως προς x και έχουμε : $x = 8 -2\psi$
Αντικαθιστούμε το x στην εξίσωση $3x-\psi=3$ και παίρνουμε :
$3(8-2\psi)-\psi=3$ ή $24-6\psi-\psi=3$ ή $-7\psi= 3-24$ ή $-7\psi=-21$ ή $\psi=3$. Άρα $x=8-2\cdot 3=2$
Οπότε: $\sqrt{\alpha}=2$ ή $(\sqrt{\alpha})^2=2^2$ ή $\alpha=4$ και $\sqrt{\beta} = 3$ ή $(\sqrt{\beta})^2=3^2$ ή $\beta=9$. Άρα η λύση του συστήματος είναι $\alpha=4$ και $\beta= 9$ δηλαδή το ζεύγος $(\alpha,\beta) = (4, 9)$

4 Ο πατέρας του Κώστα έχει στο αγρόκτημα πρόβατα και κότες. Αν όλα μαζί τα ζώα έχουν 30 κεφάλια και 100 πόδια να βρείτε πόσα είναι τα πρόβατα και πόσες είναι οι κότες.

Λύση

Έστω x είναι οι κότες και ψ είναι τα πρόβατα τότε: x + ψ = 30 (1). Η μία κότα έχει δύο πόδια, άρα οι x θα έχουν 2x πόδια. Το ένα πρόβατο έχει τέσσερα πόδια, άρα τα ψ θα έχουν 4ψ πόδια. Οπότε 2x + 4ψ = 100 (2). Έτσι έχουμε

το σύστημα: $\begin{cases} x+\psi=30 \\ x+4\psi=100 \end{cases}$ Λύνω την εξίσωση x+ψ=30 ή x=30-ψ. Αντικαθιστώ το x στην εξίσωση 2x+4ψ=100 και έχουμε :

$2(30-\psi)+4\psi=100$ ή $60-2\psi+4\psi=100$ ή $-2\psi+4\psi=100-60$ ή $2\psi = 40$ ή $\psi = 20$

Άρα x = 30-20 =10. Άρα οι κότες είναι 10 και τα πρόβατα 20.

5 Ο Κώστας πήρε από το κυλικείο του σχολείου του δύο τόστ και μία τυρόπιτα και πλήρωσε 5 ευρώ. Ο Νίκος πήρε ένα τόστ και τρείς τυρόπιτες, έδωσε 10 ευρώ και του δώσαν ρέστα 5 ευρώ. Να βρείτε πόσο κοστίζει η τυρόπιτα και πόσο το τόστ.

Λύση

Έστω x ευρώ κοστίζει το τόστ και ψ ευρώ η τυρόπιτα. Τότε έχουμε το

σύστημα: $\begin{cases} 2x+\psi=5 \\ x+3\psi=5 \end{cases}$ Λύνω την εξίσωση : x+3ψ=5 ως προς x και έχουμε : x=5-3ψ . Αντικαθιστούμε στην 2x+ψ=5

και έχουμε : $2(5-3\psi)+\psi=5$ ή $10-6\psi+\psi=5$ ή $5\psi=5$ ή $\psi=1$, άρα x=5-3=2 .

Άρα το τόστ κοστίζει 2 ευρώ και η τυρόπιτα 1 ευρώ .

6 **α)** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία Α(1,2) και Β (-1,3)

β) Να εξετάσετε αν το σημείο Γ(-1,3) ανήκει στην (ε)

Λύση

α) Η ευθεία θα έχει εξίσωση : ψ=αx+β . Η ευθεία περνάει από τα σημεία Α(1,2) και Β(-1,3) , άρα $2=\alpha\cdot 1+\beta$ (1) και $3=\alpha\cdot(-1)+\beta$ (2) . Από (1) και (2)

έχουμε το σύστημα $\begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ -\alpha+\beta =3 \end{cases}$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε : $2\beta=5$ ή $\beta=\frac{5}{2}$. Αντικαθιστούμε στην

πρώτη εξίσωση και έχουμε : $\alpha+\frac{5}{2}=2$ ή $\alpha=2-\frac{5}{2}$ ή $\alpha=-\frac{1}{2}$. Άρα η ευθεία

είναι : $\psi= -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

β) Για x=-1 και ψ=3 έχουμε : $3=-\frac{1}{2}(-1)+\frac{5}{2}$ ή $3=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$ ή 3=3 ισχύει .
Άρα το Γ ανήκει στην ευθεία .

7 Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των παρακάτω συστημάτων χωρίς να τα λύσετε.

α) $\begin{cases} 3x-4\psi=6 \\ 4x-7\psi=8 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x-5\psi=6 \\ 4x-10\psi=7 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x-2\psi=4 \\ 6x-4\psi=8 \end{cases}$

Λύση

α) Επειδή $\frac{3}{4}\neq\frac{-4}{-7}$, το σύστημα έχει μοναδική λύση.

β) Επειδή $\frac{2}{4}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{6}{7}$, το σύστημα είναι αδύνατο.

γ) Επειδή $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{4}{8}$, το σύστημα είναι αόριστο.

8 Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2-3\psi-1=0 \\ x-\psi=1 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} x^2-\psi^2=3 \\ x+\psi=1 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} (x-\psi)(x+2\psi)=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases}$

Λύση

α) Λύνω την εξίσωση x-ψ=1 ως προς ψ και έχουμε : ψ= x-1. Αντικαθιστώ το ψ στην εξίσωση $x^2-3\psi-1=0$ και έχουμε : $x^2-3(x-1)-1=0$ ή $x^2-3x+3-1=0$ ή $x^2-3x+2=0$. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=9-8=1>0$. Άρα έχουμε δύο λύσεις

$x=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-(-3)\pm\sqrt{1}}{2\alpha}=\frac{3\pm1}{2}$ άρα $x=\frac{3+1}{2}=2$ ή $x=\frac{3-1}{2}=1$.

Για x=2 , ψ=2-1 = 1 ή για x=1 , ψ=1-1=0 . Άρα (x,ψ)=(2,1) ή (x,ψ)=(1,0)

β) $\begin{array}{l|l|l} x^2-\psi^2=3 & (x-\psi)(x+\psi)=3 & x-\psi=3 \\ x+\psi=1 & x+\psi=1 & x+\psi=1 \end{array}$ Με πρόσθεση κατά μέλη

2x=4 ή x=2 , οπότε 2+ψ=1 ή ψ=-1 , άρα (x,ψ)=(2,-1)

γ) Από την εξίσωση $(x-\psi)(x+2\psi)=0$ ή $x-\psi=0$ ή $x+2\psi=0$, άρα έχουμε τα συστήματα :

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x-\psi=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} x+2\psi=0 \\ x-3\psi=4 \end{cases}$$

Λύνω (Σ_1) : Λύνω την $x-\psi=0$ ως προς x και έχουμε : $x=\psi$. Αντικαθιστώ στην $x-3\psi= 4$ και έχουμε : $\psi-3\psi=4$ ή $-2\psi=4$ ή $\psi=-2$, άρα $x=-2$.

Λύνω (Σ_2) : Λύνω την $x+2\psi=0$ ως προς x και έχουμε : $x=-2\psi$. Αντικαθιστώ στην $x-3\psi=4$ και έχουμε : $-2\psi-3\psi=4$ ή $-5\psi=4$ ή $\psi=-\frac{4}{5}$, άρα $x=-2(-\frac{4}{5})=\frac{8}{5}$,

Άρα $(x,\psi)=(-2,-2)$ ή $(x,\psi)=(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$

9 Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 14. Αν εναλλάξουμε τα ψηφία του προκύπτει αριθμός κατά 36 μονάδες μικρότερος. Να βρεθεί ο αριθμός.

Λύση

Έστω x είναι το ψηφίο των δεκάδων και ψ το ψηφίο των μονάδων. Τότε $x + \psi = 14$ (1). Ο αριθμός θα είναι: $\alpha = 10x + \psi$. Όταν εναλλάξουμε τα ψηφία ο αριθμός που προκύπτει θα είναι ο $\beta = 10\psi + x$. Δίνεται ότι $\alpha = \beta + 36$ άρα $10x + \psi =10\psi+x +36$ ή $9x - 9\psi = 36$ ή $x -\psi = 4$ (2). Λύνουμε το σύστημα των (1) και (2). Αν λύσουμε την εξίσωση $x + \psi = 14$ ως προς x παίρνουμε $x = 14 - \psi$.
Αντικαθιστούμε την τιμή του x στην εξίσωση $x -\psi = 4$ και παίρνουμε:
$14 -\psi -\psi = 4$ ή $-2\psi = 4 -14$ ή $-2\psi = -10$ ή $\psi = 5$, άρα $x = 14 - 5 = 9$.
Οπότε ο αριθμός είναι ο 95.

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Το σημείο Α(2,1) είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών $2\psi = x$ και $\psi = 1$

2. Οι ευθείες $\psi -3x = 2$ και $\psi -x = 0$ τέμνονται στην αρχή των αξόνων

3. Οι ευθείες ε_1: $3x -2\psi = 3$, ε_2: $6x -4\psi = -3$ είναι παράλληλες.

4. Οι ευθείες ε_1: $4x -\psi = 1$, ε_2 : $x-\frac{1}{4}\psi=\frac{1}{4}$ τέμνονται.

5. Η σχέση $(3x -2\psi + 1)(x -2\psi + 5) = 0$ δίνει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

6. Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις.

7. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, x, ψ είναι αόριστο, τότε αυτό αληθεύει για κάθε x, $\psi \in R$.

8. Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, x, ψ έχει λύσεις τα ζεύγη (3,2) και (-1,2) τότε θα έχει λύση και το (-2,2)

9. Το σύστημα $\begin{cases} x-2\psi=0 \\ 4x+7\psi=0 \end{cases}$ δεν είναι ποτέ αδύνατο

B. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Οι ευθείες ε_1: $3x + 2\psi = 5$ και ε_2: $2x - 5\psi = -3$ έχουν κοινό σημείο το
α. Α(1,1), **β.** Β(3, -2), **γ.** Γ(-4, -1) **δ.** Δ(6,3)

2. Η παράσταση $(x-3\psi+5)^2 + (2x+\psi-4)^2 + 2008$ γίνεται ελάχιστη όταν:
α. $x = 1$ ή $\psi = 2$, **β.** $x = 1$ και $\psi = 2$, **γ.** $x = 2$ και $\psi = 1$, **δ.** $x = -1$ και $\psi = 2$.

3. Το σύστημα : $\begin{cases} 2x-4\psi=1 \\ 6x-12\psi = 5 \end{cases}$ είναι :

α. αδύνατο, **β.** αόριστο, **γ.** έχει 2 λύσεις, **δ.** έχει μοναδική λύση.

4. Το σύστημα $\begin{cases} x-2\psi=1 \\ x+\psi=2 \end{cases}$ παριστάνει δύο ευθείες :

α. που είναι παράλληλες, **β.** που τέμνονται, **γ.** που ταυτίζονται.
δ. τίποτα από τα παραπάνω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 3x+2\psi=5 \\ 2x-2\psi=0 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 2x+3\psi=2 \\ 5x-7\psi=5 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} 3x-5\psi=x+1 \\ 4x+\psi=13 \end{cases}$ **δ)** $\begin{cases} 4x-2\psi=2 \\ 3x+\psi=7 \end{cases}$

2 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{x+1}{2}+\frac{\psi-1}{4}=\frac{3}{2} \\ \frac{x+1}{2}-\frac{\psi-1}{2}=\frac{3}{4} \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \frac{4x-3}{5}+\frac{\psi-1}{2}=2 \\ \frac{3x+2}{4}-\frac{2\psi-1}{3}=1 \end{cases}$

3 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}=5 \\ 2\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}=-3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}=-5 \\ 4\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}=-2 \end{cases}$

4 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}=5 \\ 2\sqrt{\alpha}-5\sqrt{\beta}=-3 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} 3\sqrt{\alpha}-2\sqrt{\beta}=-5 \\ 4\sqrt{\alpha}+2\sqrt{\beta}=-2 \end{cases}$

5 Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \frac{\alpha}{2}=\frac{\beta}{5} \\ 3\alpha-7\beta=15 \end{cases}$ **β)** $\begin{cases} \alpha=\frac{\beta}{4} \\ \alpha+2\beta=10 \end{cases}$ **γ)** $\begin{cases} \frac{\alpha}{3}=\frac{\beta}{2} \\ 3\alpha+5\beta=16 \end{cases}$

6 **α)** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από τα σημεία Α (1,2) και Β(2, -1)

β) Να εξετασθεί αν το σημείο Γ(1, 2) είναι σημείο της ευθείας που ορίζουν τα σημεία Α και Β.

7 **α)** Να βρείτε το σημείο στο οποίο τέμνονται οι ευθείες με εξισώσεις:
(ε) $\psi = x-2$ και (ζ) $3x - 4\psi = 5$

β) Αν η ευθεία $(\lambda - 1) \cdot x + (3\lambda - 2) \cdot \psi = 0$ διέρχεται από το σημείο που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το λ

8 Δίνονται οι ευθείες (ε) $3x - 2\psi = 1$ και (ζ) $x - 4\psi = -3$.
α) Να βρείτε το σημείο τομής Κ των ευθειών (ε) και (ζ).
β) Να βρείτε την ευθεία (η) που περνάει από το Κ και από το σημείο που τέμνει η (ζ) τον x΄x.

9 Αν το σύστημα $\begin{cases} x+2\alpha\psi=9 \\ \alpha x-2\beta\psi=-10 \end{cases}$ έχει λύση την $(x,\psi)=(1,3)$

α) Να βρείτε τις τιμές των α, β
β) Να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας $\psi = 3\alpha x + 2\beta$, όπου α, β οι τιμές που βρήκατε από το α) ερώτημα

10 Σε ένα αγρόκτημα είναι κότες και κουνέλια. Αν τα ζώα έχουν όλα μαζί 50 κεφάλια και 140 πόδια, να βρείτε πόσες είναι οι κότες και πόσα τα κουνέλια.

11 Δίνονται οι ευθείες (ε) $3x - \psi = 2$ και (ζ) $4x + \psi = 5$
α) Να βρείτε τους αριθμούς α, β αν η (ε) περνάει από το $K(\alpha-1,\beta)$ και η (ζ) από το σημείο $\Lambda(\beta + 2, \alpha)$

β) Για τις τιμές των α, β από το α) ερώτημα να βρείτε την ευθεία ΚΛ

12 Αν η εξίσωση: $x^2 - (3\kappa - \lambda)x + \lambda = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και 3 τότε να βρείτε τους αριθμούς κ, λ.

13 Να αποδείξετε ότι:
α) Τα σημεία Α(2,4), Β(-3,8) και Γ(12,-4) βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία
β) Να δείξετε ότι η παραπάνω ευθεία τέμνει τον x΄x σε σημείο που απέχει 7 μονάδες από την αρχή των αξόνων.

14 Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ευθείες (ε) $3x - \psi = 2$, (η) $4x + \psi = 5$ και (ζ) $x - 3\psi = -2$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

15 Έστω ότι η ευθεία (ε) $3x - \psi + 6\beta = 0$ τέμνει τον x΄x στο Α(4 ,0) και η ευθεία (η) $2x - 4\psi + \alpha - 2 = 4$ τέμνει τον ψ΄ψ στο Β(0, 6).