

### 3.1 Η έννοια της γραμμικής εξίσωσης

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους λέμε κάθε εξίσωση της μορφής  $ax + by = c$ , με  $x, y \in \mathbb{R}$  και  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

Τα  $x, y$  είναι οι άγνωστοι, τα  $a, b$  οι συντελεστές και το  $c$  ο σταθερός όρος.

Κάθε γραμμική εξίσωση παριστάνει ευθεία όταν τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές είναι διάφορος του μηδενός

Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.

Λύση μιάς γραμμικής εξίσωσης  $ax + by = c$  ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών  $(x, y)$  που την επαληθεύει.

#### Γενικά:

**α)** Αν ένα σημείο ανήκει σε μία ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

**β)** Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

#### Ειδικές περιπτώσεις

- Η εξίσωση  $y = k$ , με  $k \neq 0$  παριστάνει μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$  και τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $(0, k)$ , ενώ η εξίσωση  $y = 0$  παριστάνει τον  $x'x$ .
- Η εξίσωση  $x = k$  με  $k \neq 0$  παριστάνει μία ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y'y$  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $(k, 0)$ , ενώ η εξίσωση  $x = 0$  παριστάνει τον  $y'y$ .

Κάθε σημείο του άξονα  $x$  έχει την μορφή  $(x, 0)$

Κάθε σημείο του άξονα  $y'y$  έχει την μορφή  $(0, y)$

#### Παρατήρηση:

Για να βρούμε τα σημεία που τέμνει μία ευθεία  $(\epsilon)$  τους άξονες:

**α)** Για τον άξονα  $x'x$ , βάζουμε όπου  $y = 0$  και βρίσκουμε το  $x$ .

**β)** Για τον άξονα  $y'y$ , βάζουμε όπου  $x = 0$  και βρίσκουμε το  $y$ .

- 1** Δίνεται η γραμμική εξίσωση:  $7x + 2\psi = 9$ . Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω ζεύγη είναι λύσεις της γραμμικής εξίσωσης.  
 Α(1,1) Β(3,-2) Γ(0,0)

**Λύση**

Για το σημείο Α:  $7 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 7 + 2 = 9$ , άρα είναι λύση

Για το σημείο Β:  $7 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = 21 - 4 = 17 \neq 9$ , άρα δεν είναι λύση

Για το σημείο Γ:  $7 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0 \neq 9$ , άρα δεν είναι λύση

- 2** Δίνεται η ευθεία  $2x + 3\psi = 5$

**α)** Να εξετάσετε αν τα σημεία Α(1, 1) Β(-2, 3) ανήκουν στην ευθεία

**β)** Να κάνετε τη γραφική παράσταση της ευθείας

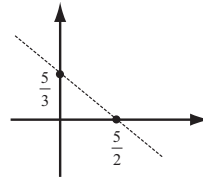
**γ)** Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η ευθεία να διέρχεται από το σημείο Μ( $\lambda-1, \lambda$ )

**Λύση**

**α)** Για το σημείο Α:  $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$ , άρα το Α ανήκει στην ευθεία.

Για το σημείο Β:  $2 \cdot (-2) + 3 \cdot 3 = -4 + 9 = 5$ , άρα το Β ανήκει στην ευθεία

**β)** Για  $x = 0$ ,  $\psi = \frac{5}{3}$ , άρα το σημείο είναι:  $(0, \frac{5}{3})$  Για  $\psi = 0$ ,  $x = \frac{5}{2}$ ,



άρα το σημείο είναι  $(\frac{5}{2}, 0)$

**γ)** Για να διέρχεται η ευθεία από το Μ πρέπει  $2 \cdot (\lambda - 1) + 3 \cdot \lambda = 5$  ή

$$2\lambda - 2 + 3\lambda = 5 \quad \text{ή} \quad 5\lambda = 5 + 2 \quad \text{ή} \quad 5\lambda = 7 \quad \text{ή} \quad \lambda = \frac{7}{5}.$$

- 3** Δίνεται η ευθεία (ε)  $4x + 6\psi = 12$ .

**α)** Να βρείτε τα σημεία που τέμνει η ευθεία (ε) τους άξονες

**β)** Αν Α είναι το σημείο που τέμνει η(ε) τον  $x'x$ , να βρείτε την ευθεία (η) που περνάει από το Α και είναι παράλληλη στον  $\psi'\psi$ .

**Λύση**

**α)** Για τον άξονα  $x'x$ : Θέτω όπου  $\psi$  το 0, οπότε  $4 \cdot x + 6 \cdot 0 = 12$  ή  $4x = 12$  ή  $x=3$

Άρα τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο Α(3,0)

Για τον άξονα  $\psi'\psi$ : Θέτω όπου  $x$  το 0, οπότε  $4 \cdot 0 + 6\psi = 12$  ή  $\psi = 2$ .

Άρα τέμνει τον  $\psi'\psi$  στο σημείο Β(0,2)

**β)** Από α) είναι Α(3,0) οπότε η ζητούμενη ευθεία θα είναι  $x = 3$

4

Δίνεται η εξίσωση:  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)\psi = 3$  (1)

- α) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία .  
 β) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $x'x$ .  
 γ) Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  ώστε η (1) να παριστάνει ευθεία που να περνάει από το  $A(0,3)$ .

### Λύση

α) Η εξίσωση  $ax + b\psi = \gamma$ , παριστάνει ευθεία όταν ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές  $a, b$  είναι διάφορος του μηδενός.

Βρίσκω την τιμή του  $\lambda$  για την οποία οι συντελεστές των  $x$  και  $\psi$  γίνονται ταυτόχρονα μηδέν. Λύνω  $\lambda - 1 = 0$  ή  $\lambda = 1$ . Αντικαθιστώ στην (1) όπου  $\lambda=1$  και έχουμε:  $1^2 - 1 = 0$ , άρα για  $\lambda = 1$  δεν έχουμε ευθεία.

β) Για να παριστάνει η (1) ευθεία παράλληλη στον  $x'x$  πρέπει:  
 $\lambda^2 - 1 = 0$  ή  $(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$  ή  $\lambda - 1 = 0$  ή  $\lambda + 1 = 0$  ή  $\lambda = 1$   
 (απορρίπτεται) ή  $\lambda = -1$ . Η τιμή  $\lambda = 1$  απορρίπτεται διότι για  $\lambda = 1$  δεν έχουμε ευθεία .

γ) Για να παριστάνει η (1) ευθεία που να περνάει από το  $A(0,3)$  πρέπει  
 $(\lambda^2 - 1) \cdot 0 + (\lambda - 1) \cdot 3 = 0$  ή  $3(\lambda - 1) = 0$  ή  $\lambda - 1 = 0$  ή  $\lambda = 1$   
 απορρίπτεται. Άρα δεν υπάρχει  $\lambda$  που η (1) να παριστάνει ευθεία που να διέρχεται από το  $A(0,3)$

## Ερωτήσεις κατανόησης

A. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση  $3x^2 + \psi = 7$  είναι γραμμική.
2. Η εξίσωση  $\frac{\alpha}{x} + \beta\psi = \gamma$  είναι γραμμική .
3. Η εξίσωση  $(\alpha-1)x + (\alpha^2-1)\psi = 3$  είναι γραμμική για κάθε τιμή του  $\lambda$ .
4. Η ευθεία  $x = 5$  είναι συνάρτηση.
5. Η ευθεία  $\psi = 6$  είναι συνάρτηση.
6. Οι ευθείες  $x = 5$  και  $x = -1$  είναι παράλληλες.
7. Οι ευθείες  $\psi = 3$  και  $x = -4$  είναι κάθετες.
8. Η ευθεία  $x = 3$  είναι παράλληλη στον  $x$ .

9. Η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)\psi = 0$  παριστάνει πάντα ευθεία.
10. Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
11. Η εξίσωση  $\psi = 6$  έχει άπειρες λύσεις.
12. Η εξίσωση  $3x - 5 = 0$  είναι γραμμική.
13. Αν  $(x_0, \psi_0)$  είναι μία λύση της γραμμικής εξίσωσης  $ax + b\psi = \gamma$  τότε  $ax_0 + b\psi_0 = \gamma$ .
14. Η εξίσωση  $ax + b\psi = \gamma$  γραφικά παριστάνει πάντα ευθεία γραμμή.
15. Η εξίσωση  $3x + \lambda\psi = 3$  γραφικά παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda$ .
16. Το σημείο  $M(-1,2)$  ανήκει στην ευθεία  $x = 2$ .
17. Κάθε σημείο της ευθείας  $\psi = x$  ισαπέχει από τους άξονες.
18. Το σημείο τομής των ευθειών  $(\epsilon) 3x - \psi = 3$  και  $(\zeta) x - \psi = -1$  είναι το  $(0,0)$ .
19. Η ευθεία  $\epsilon: 2x + 2\psi = 6$  τέμνει το  $x'$  στο σημείο  $(-3,0)$ .
20. Οι ευθείες  $x = 4$  και  $\psi = -2$  τέμνονται στο σημείο  $A(4,-2)$ .
21. Η ευθεία  $x = 5$  τέμνει τον  $\psi'$  στο  $A(0,5)$ .
22. Η ευθεία  $2x + 6\psi = 0$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

### B. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

1. Η ευθεία  $\psi = 6$  είναι κάθετη:
  - α. στον  $x'$
  - β. στον  $\psi'$
  - γ. στην ευθεία  $\psi = 3$
  - δ. στην ευθεία  $\psi = 6x$ .
2. Αν η ευθεία  $(\epsilon) 3x - (\lambda - 1)\psi = 3$  περνάει από το σημείο  $A(\lambda, \lambda)$  τότε η τιμή του  $\lambda$  είναι:
  - α.  $\lambda = 1$
  - β.  $\lambda = 0$
  - γ.  $\lambda = 1$  ή  $\lambda = 3$
  - δ.
3. Το σημείο τομής των ευθειών  $(\epsilon) 2x - \psi = 1$  και  $(\zeta) 3x + 2\psi = 5$  είναι:
  - α.  $O(0,0)$
  - β.  $A(1,1)$
  - γ.  $B(-1,1)$
  - δ.  $\Gamma(1,-1)$
4. Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο  $A(-2,3)$  και είναι παράλληλη στον  $\psi'$  έχει εξίσωση:
  - α.  $x = -2$
  - β.  $x = 2$
  - γ.  $\psi = 3$
  - δ.  $\psi = 2$

5. Η ευθεία  $(\varepsilon) 2x + 4\psi - 8 = 0$ , τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο:  
**α.** (4,0), **β.** (0,4), **γ.** (2,0), **δ.** (0,2).
6. Η ευθεία  $x = 4$  είναι παράλληλη:  
**α.** στον  $x'x$ , **β.**  $\psi'\psi$ , **γ.** στην ευθεία  $\psi = x$ , **δ.** στην ευθεία  $\psi = -x$ .
7. Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμική είναι:  
**α.**  $2x - x\psi = 2$ , **β.**  $4x - 5\psi + 3 = 0$  **γ.**  $x - 1 + \psi = 3$ , **δ.**  $x + \psi - 1 + 2 = 0$
8. Η εξίσωση  $(\lambda 2 - \lambda)x + \lambda\psi = 3$ . Παριστάνει ευθεία όταν:  
**α.**  $\lambda = 0$ , **β.**  $\lambda \neq 0$ , **γ.**  $\lambda \neq 1$ , **δ.**  $\lambda = 1$
9. Η ευθεία:  $x - 4\psi = 8$ , σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν:  
**α.** 8 τ.μον., **β.** 4 τ. μον., **γ.** 2 τ. μον., **δ.** 16 τ.μον.

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις ευθείες:  
**α)**  $\varepsilon_1: x - 3\psi = 4$  **β)**  $\varepsilon_2: x - \psi = 0$ , **γ)**  $\varepsilon_3: x = 4$  **δ)**  $\psi = -2$
2. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): 3x - \psi = 3$ .  
**α)** Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$  ώστε η ευθεία να τέμνει τον  $x/x$  στο σημείο  $A(a^2 - 3, 0)$ .  
**β)** Για τη μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε από το  $\alpha$ ) ερώτημα να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας:  $a \cdot x + \psi = 5$
3. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): x - 4\psi = 8$   
**α)** Να βρείτε τα σημεία που η ευθεία  $(\varepsilon)$  τέμνει τους άξονες.  
**β)** Αν  $A$  είναι το σημείο που η  $(\varepsilon)$  τέμνει τον  $x / x$ , να βρείτε την ευθεία που περνάει από το  $A$  και είναι παράλληλη στον  $\psi / \psi$ .
4. Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon): a \cdot x + 5\psi = 10$ . Να βρείτε: **α)** Τον αριθμό  $a$  αν η ευθεία τέμνει τον  $x'x$  στο 2. **β)** Για την τιμή του  $a$  που βρήκατε στο  $\alpha$ ) ερώτημα να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η  $(\varepsilon)$  με τους άξονες.
5. Να βρείτε την τιμή του  $a$ , ώστε η εξίσωση  $(a^2 - 1)x + (a - 1)\psi = 3$   
**α)** Να παριστάνει ευθεία  
**β)** Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $x'x$   
**γ)** Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον  $\psi'\psi$