

2.4 Κλασματικές εξισώσεις

Κλασματική εξίσωση λέγεται κάθε εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή.

Για να ορίζεται μία κλασματική εξίσωση θα πρέπει οι παρονομαστές όλων των κλασμάτων της να είναι διάφοροι του μηδενός.

Για να λύσουμε μία κλασματική εξίσωση ακολουθούμε την εξής διαδικασία:

- Παραγοντοποιούμε τους παρονομαστές
- Βρίσκουμε το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών.
- Βρίσκουμε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζεται η εξίσωση.
- Απαλείφουμε τους παρονομαστές . Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το Ε.Κ.Π. και κάνουμε τις απλοποιήσεις.
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει.
- Απορρίπτουμε από τις ρίζες που βρίσκουμε εκείνες που μηδενίζουν τους παρονομαστές της αρχικής εξίσωσης.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \quad \beta) \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Έχουμε: } \alpha) \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x+2} = \frac{5}{x^2-4} \quad \beta) \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$$

Το Ε.Κ.Π. των παρονομαστών είναι Ε.Κ.Π. = $(x-2)(x+2)$.

Πρέπει:

$$(x-2)(x+2) \neq 0 \text{ ή } x-2 \neq 0 \text{ και } x+2 \neq 0 \text{ ή } x \neq 2 \text{ και } x \neq -2.$$

Έχουμε τώρα διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \text{(1) ή } (x-2)(x+2) \cdot \frac{1}{x-2} - (x-2)(x+2) \cdot \frac{4}{x+2} &= (x-2)(x+2) \cdot \frac{5}{(x-2)(x+2)} \text{ ή} \\ \text{ή } 15(x+2) - 4(x-2) &= 5 \text{ ή } 15x+30-4x+8=5 \text{ ή } 15x-4x=5-8-30 \text{ ή} \\ \text{ή } 11x &= -33 \text{ ή } \frac{11x}{11} = \frac{-33}{11} \text{ άρα } x = -3. \end{aligned}$$

β) Οι παρονομαστές είναι γινόμενο οπότε θα βρούμε το Ε.Κ.Π. $x^2(x+1)^2$. **Κεφάλαιο 2**

Πρέπει: $x^2(x+1)^2 \neq 0$ $x^2 \neq 0$ και $(x+1)^2 \neq 0$ $x \neq 0$ και $x \neq -1$

Έχουμε τώρα διαδοχικά

$$x^2(x+1)^2 \cdot \frac{2}{x+1} - x^2(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = x^2(x+1)^2 \frac{2}{x} - x^2(x+1)^2 \cdot \frac{3}{(x+1)^2} \text{ ή}$$

$$2x^2(x+1) - (x+1)^2 = 2(x+1)^2x - 3x^2 \text{ ή } 2x^3 + 2x^2 - (x^2 + 2x + 1) = 2(x^2 + 2x + 1)x - 3x^2 \text{ ή}$$

$$2x^3 + 2x^2 - x^2 - 2x - 1 = 2x^3 + 4x^2 + 2x - 3x^2 \text{ ή } 4x = -1 \text{ άρα } x = -\frac{1}{4}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση $\frac{x^2-1}{x-1}$ έχει ρίζα το 1.
2. Οι εξισώσεις $x^2 - 4 = 0$ και $\frac{4-x^2}{2-x}$ είναι ισοδύναμες.
3. Η εξίσωση $\frac{3x-1}{4} - \frac{4x-3}{2} = \frac{x}{3}$ είναι κλασματική.
4. Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $\frac{3}{3+x} + \frac{x}{x} = 2$

B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής.

1. Η εξίσωση $\frac{x^3-4x}{2-x}$ έχει ρίζες:
α. 0 και 2, **β.** 0, 2 και -2 **γ.** 0 ή -2 **δ.** 2 και -2
2. Η εξίσωση $\frac{x^3(x^2-1)}{x(x-1)} = 0$ στο σύνολο \mathbb{N} έχει ρίζες:
α. -1, **β.** 0, **γ.** 0, 1, -1 **δ.** αδύνατη.
3. Η εξίσωση $\frac{x^2-1}{x-1} = 0$ δεν μπορεί να πάρει την τιμή:
α. 1 **β.** -2 **γ.** -1 **δ.** -1 και -2

1. Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{R} τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{4}{x^2-4} \quad \beta) \frac{2}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x+2} - \frac{2}{x^2-4}$$

$$\gamma) \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} = 0 \quad \delta) \frac{x}{x^2-64} = \frac{1}{x+8}$$

2. Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{Q} τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2x-1}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = \frac{x-1}{x+2} \quad \beta) \frac{6x}{x^2-9} = \frac{4}{x+3} - \frac{3}{3-x}$$

$$\gamma) \frac{x+2}{x^2-5x+6} + \frac{2x-1}{2x^2-4x} = \frac{2}{3-x} \quad \delta) \frac{2x}{4x^2-1} + \frac{x+1}{2x^2-x} - \frac{3x-1}{2x^2+x} = 2$$

3. Να λύσετε στο σύνολο \mathbb{N} τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2x}{x^2-1} = 2 - \frac{x}{1-x} \quad \beta) \frac{1}{4x-x^2-4} + \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$\gamma) \frac{4x+2}{3x+2} = \frac{6x^2+4}{9x^2-4} + \frac{x+1}{2-3x} \quad \delta) \frac{9}{x+4} + 9 = 2x$$

4. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\alpha+1}{x^2-x} - \frac{x+2\beta+1}{x^2+x} = \frac{\beta x}{x^2-1}$, όπου α είναι η μικρότερη και β η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 5x + 6 = 0$.

5. Να βρείτε τον αριθμό στον οποίο αν προσθέσουμε το πενταπλάσιο του αντιστρόφου του, βρίσκουμε το 4.

6. Να βρείτε δύο αριθμούς που το άθροισμά τους είναι 12 ενώ το άθροισμα των αντιστρόφων τους είναι

7. Τα έξοδα ενός γεύματος ήταν 120 ευρώ. Επειδή όμως μεταξύ των ατόμων που πήραν μέρος στο γεύμα ήταν και 3 φιλοξενούμενοι, οι υπόλοιποι αναγκάστηκαν να πληρώσουν 9 ευρώ επιπλέον, ο καθένας. Πόσα άτομα πήραν μέρος στο γεύμα.

8. Ένας εργάτης Α, για να τελειώσει ένα έργο, χρειάζεται 3 μέρες περισσότερο από έναν εργάτη Β. Αν εργαστούν μαζί και οι δύο τελειώνουν το έργο σε δύο ημέρες. Σε πόσες μέρες τελειώνει το έργο ο κάθε εργάτης μόνος του.

9. Σε μία εκδρομή οι γυναίκες ήταν κατά 5 λιγότερες από τους άνδρες. Οι άνδρες πλήρωσαν συνολικά 180 ευρώ, οι δε γυναίκες 80 ευρώ. Να βρείτε πόσοι ήταν οι άνδρες και πόσες οι γυναίκες, αν κάθε άνδρας πλήρωσε 4 ευρώ περισσότερα από κάθε γυναίκα.