10. Ένα τρένο διανύει 300 Km με σταθερή ταχύτητα .Αν η ταχύτητά του αυξηθεί κατά 5 Km / h, τότε το τρένο θα διανύσει τα 300 Km σε 2 h γρηγορότερα. Ποια είναι η ταχύτητα του τρένου;

2.5 Ανισότητες - Ανισώσεις με έναν άγνωστο

Αν έχουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α, β τότε μπορεί να ισχύουν:

α) Ο α να είναι μεγαλύτερος από τον β και γράφουμε $α > β$ όταν η διαφορά $α-β > 0$.

β) Ο α να είναι μικρότερος από τον β και γράφουμε $α < β$ όταν η διαφορά $α-β< 0$.

γ) Ο α να είναι ίσος με τον β και γράφουμε $α - β$ όταν η διαφορά $α - β = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν δύο αριθμοί είναι τοποθετημένοι σε άξονα τότε μεγαλύτερος είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα.

2. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από το 0 .

3. Κάθε αρνητικός είναι μικρότερος από το 0 .

4. Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από κάθε αρνητικό .

Πώς συγκρίνουμε δύο αριθμούς

Για να συγκρίνουμε δύο πραγματικούς αριθμούς α, β που δεν έχουν παρασταθεί με σημεία ενός άξονα, τότε βρίσκουμε την διαφορά τους και εξετάζουμε αν είναι θετική ή αρνητική ή μηδέν. Έτσι έχουμε:

- Αν $α - β > 0$ τότε $α > β$
- Αν $α - β < 0$ τότε $α < β$
- Αν $α -β = 0$ τότε $α = β$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. Αν στα μέλη προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό η φορά της ανίσωσης διατηρείται.

Γενικά ισχύει: Αν $α > β$ τότε **α)** $α + γ > β + γ$ και **β)** $α - γ > β - γ$

Απόδειξη

α) Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών $\alpha + \gamma$, $\beta + \gamma$. Έτσι έχουμε:
$\alpha + \gamma - (\beta + \gamma) = \alpha + \gamma - \beta - \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.

Δηλαδή η διαφορά $(\alpha + \gamma) - (\beta + \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

β) Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$. Έτσι έχουμε:
$\alpha - \gamma - (\beta - \gamma) = \alpha - \gamma - \beta + \gamma = \alpha - \beta$. Είναι όμως $\alpha > \beta$, οπότε $\alpha - \beta > 0$.

Δηλαδή η διαφορά $(\alpha - \gamma) - (\beta - \gamma)$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha - \gamma > \beta - \gamma$

2. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με ένα θετικό αριθμό τότε η φορά της ανίσωσης διατηρείται.

Γενικά ισχύει: Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε **α)** $\alpha\gamma > \beta\gamma$ και β) $\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

Απόδειξη

α) Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$. Έτσι έχουμε:
$\alpha\gamma - \beta\gamma = \gamma(\alpha - \beta)$ (1) . Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$.Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν γινόμενο θετικό, δηλ $\gamma(\alpha - \beta) > 0$. Άρα από την ισότητα (1) η διαφορά $\alpha\gamma - \beta\gamma$ είναι θετικός αριθμός, οπότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$

β) Βρίσκουμε την διαφορά των αριθμών $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}$. Έτσι έχουμε:

$\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\alpha - \beta}{\gamma}$ (1) . Είναι όμως $\gamma > 0$ και $\alpha - \beta > 0$, αφού $\alpha > \beta$.

Άρα οι αριθμοί γ και $\alpha - \beta$ είναι θετικοί, οπότε έχουν πηλίκο θετικό, δηλ,

$\frac{\alpha - \beta}{\gamma} > 0$

Άρα από την ισότητα (1) η διαφορά $\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma}$ είναι θετικός αριθμός, οπότε

$\frac{\alpha}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$

3. Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη μιάς ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε η φορά της ανίσωσης αλλάζει.

Γενικά ισχύει: Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$ και $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$

4. Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Γενικά ισχύει ότι: Αν $α > β$ και $γ > δ$ τότε $α + γ > β + δ$

Από τις προηγούμενες ιδιότητες ισχύει και η μεταβατική ιδιότητα:
Αν $α > β$ και $β > γ$ τότε $α > γ$

5. Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες που έχουν την ίδια φορά και θετικά μέλη, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά.

Γενικά ισχύει ότι:
Αν α, β, γ, δ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $α > β$ και $γ > δ$ τότε $αγ > βδ$

Απόδειξη

Είναι $α > β$ και $γ > 0$, οπότε σύμφωνα με τη 2) ιδιότητα $αγ > βγ$ (1)
Είναι $γ > δ$ και $β > 0$, οπότε $βγ > βδ$ (2), από τις (1) και (2) και από τη μεταβατική ιδιότητα $αγ > βδ$.

Ακόμη ισχύουν:

α) Το άθροισμα δύο θετικών αριθμών είναι θετικός αριθμός.

β) Το άθροισμα δύο αρνητικών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

γ) Το γινόμενο και το πηλίκο ομόσημων αριθμών είναι θετικός.

δ) Το γινόμενο και το πηλίκο ετερόσημων είναι αρνητικός

ε) Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει $α^2 \geq 0$.

Επομένως: Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει
$α^2 + β^2 = 0$, τότε $α = 0$ και $β = 0$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

α) Δεν αφαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

β) Δεν διαιρούμε ανισότητες κατά μέλη.

γ) Όταν πολλαπλασιάζουμε ανισότητες κατά μέλη όλοι οι αριθμοί πρέπει να είναι θετικοί.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν $x < 2ψ$, να συγκρίνετε τους αριθμούς:

α) $3(x - 2ψ)$ και $2(x - 4ψ)$

β) $2(3 - ψ)$ και $3(-x + 5) + 2x$

Λύση

α) Βρίσκω την διαφορά των αριθμών και την συγκρίνω με το 0.
$3(x - 2ψ) - 2(x - 2ψ) = 3x - 6ψ - 2x + 4ψ = x - 2ψ < 0$ διότι από την υπόθεση $x < 2ψ$.

Άρα $3(x - 2ψ) < 2(x - 4ψ)$

β) Βρίσκω την διαφορά των αριθμών και τη συγκρίνω με το 0.
$2(3 - ψ) - [3(-x + 5) + 2x] = 6 - 2ψ + 3x - 15 - 2x = -9 + x - 2ψ < 0$ διότι έχουμε άθροισμα αρνητικών. Άρα $2(3 - ψ) < 3(-x + 5) + 2x$

2. **α)** Αν α, β είναι ομόσημοι με α > β, να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{α} < \frac{1}{β}$

β) Αν α> 0, να αποδείξετε ότι $α + \frac{1}{α} \geq 2$ (Πότε ισχύει η ισότητα;)

γ) Αν α<0, να αποδείξετε ότι $α + \frac{1}{α} \leq -2$ (Πότε ισχύει η ισότητα;)

Λύση

α) οι αριθμοί α, β είναι ομόσημοι άρα αβ>0. Πολλαπλασιάζω τα δύο μέλη της α > β με $\frac{1}{αβ} > 0$ και έχουμε α > β ή $\frac{1}{αβ} \cdot α > \frac{1}{αβ} \cdot β$ ή $\frac{1}{β} > \frac{1}{α}$ ή $\frac{1}{α} < \frac{1}{β}$

β) Αρκεί να δείξω ότι η διαφορά $α + \frac{1}{α} - 2$ είναι μη αρνητικός αριθμός.

$α + \frac{1}{α} - 2 = \frac{α^2 + 1 - 2α}{α} = \frac{(α - 1)^2}{α} \geq 0$, διότι $(α-1)^2 \geq 0$ (είναι τετράγωνο ενός αριθμού) και α>0. Η ισότητα ισχύει όταν α-1 = 0 δηλ α = 1.

γ) Αρκεί να δείξω ότι η διαφορά $α + \frac{1}{α} - (-2)$ δεν είναι θετικός αριθμός.

$α + \frac{1}{α} - (-2) = α + \frac{1}{α} + 2 = \frac{α^2 + 1 + 2α}{α} = \frac{(α + 1)^2}{α} \leq 0$, διότι $(α+1)^2 \geq 0$ (είναι τετράγωνο ενός αριθμού) και α <0. Η ισότητα ισχύει όταν α+1 = 0 δηλ α = -1.

3. Αν $1 \leq x < 2$ και $3 < ψ \leq 5$ να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων :

α) $x + 2ψ$ **β)** $-3x + 4ψ$ **γ)** $\frac{x}{ψ}$ **δ)** $3x - 4ψ$

Λύση

α) Είναι $1 \leq x < 2$ (1) και $3 < ψ \leq 5$, άρα $2 \cdot 3 < 2 \cdot ψ \leq 2 \cdot 5$ ή $6 < 2ψ \leq 10$ (2).
Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:
$1 + 6 < x + 2ψ < 2 + 10$ ή $7 < x + 2ψ < 12$

β) Είναι $1 \leq x < 2$, άρα $-2 \cdot 1 \geq -2 \cdot x > -2 \cdot 2$ ή $-4 < -2x \leq -2$ (1). Επίσης $3 < ψ \leq 5$, άρα $4 \cdot 3 < 4 \cdot ψ \leq 4 \cdot 5$ $12 < 4ψ \leq 20$ (2). Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:
$-4 + 12 < -2x + 4ψ \leq -2 + 20$ ή $8 < -2x + 4ψ \leq 18$.

γ) Είναι $1 \leq x < 2$ (1) και $3 < ψ \leq 5$, άρα $\frac{1}{3} > \frac{1}{ψ} \geq \frac{1}{5}$ ή $\frac{1}{5} \leq \frac{1}{ψ} < \frac{1}{3}$ (2).

Τις (1) και (2) τις πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη, οπότε:
$1 \cdot \frac{1}{5} \leq x \cdot \frac{1}{ψ} < 2 \cdot \frac{1}{3}$ ή $\frac{1}{5} \leq \frac{x}{ψ} < \frac{2}{3}$.

δ) Είναι $1 \leq x < 2$, άρα $3 \cdot 1 \leq 3x < 3 \cdot 2$ ή $3 \leq 3x < 6$ (1). Επίσης $3 < ψ \leq 5$, άρα $-4 \cdot 3 > -4ψ \geq -4 \cdot 5$ ή $-20 \leq -4ψ < -12$ (2). Τις (1) και (2) τις προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε:
$3 - 20 \leq 3x - 20 < 6 - 12$ ή $-17 \leq 3x - 20 < -6$.

4. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $4 - \frac{3}{2}x > \frac{13}{8} - \frac{1}{6}(4x-3)$ β) $(x+1)^2 - (x-1)^2 < 0$

Λύση

α) Έχουμε : $4 - \frac{3}{2}x > \frac{13}{8} - \frac{1}{6}(4x-3)$ ή $24 \cdot 4 - 24 \cdot \frac{3}{2}x > 24 \cdot \frac{13}{8} - 24 \cdot \frac{1}{6}(4x-3)$ ή

ή $96 - 12 \cdot 3x > 3 \cdot 13 - 4 \cdot (4x-3)$ ή $96 - 36x > 39 - 16x + 12$ ή $-36x + 16x > 39 + 12 - 96$ ή

ή $-20x > -45$ ή $\frac{-20x}{-20} < \frac{-45}{-20}$ ή $x < \frac{9}{4}$

β) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 < 0$ ή $x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) < 0$ ή $x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 < 0$
ή $4x < 0$ ή $x < 0$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$

2. Αν $\alpha > -2$ και $x > \psi$ τότε ισχύει $\alpha x > -2\psi$

3. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\ \beta > \gamma\ \delta$

4. Αν $\alpha>\beta$ και $\gamma> \delta$ τότε $\alpha-\gamma>\beta-\delta$

5. Η λύση της ανίσωσης $0x > 3$ είναι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του 3

6. Αν $\alpha^2 > 0$ τότε $\alpha > 0$

7. Αν $\alpha^3 >0$ τότε $\alpha> 0$

8. Αν $\alpha < 1$ και $\beta < 1$ τότε $\alpha\beta < 1$

9. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma<0$, τότε $\frac{\alpha}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$.

10. Αν $\frac{\alpha}{\beta} < 1$, τότε $\alpha < \beta$.

11. Αν $\alpha > \beta$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$

12. Αν $\alpha \cdot \beta > 0$, τότε α, β είναι θετικοί .

13. Αν $\alpha > \beta$ και $\alpha > \gamma$, τότε $\beta > \gamma$

14. Αν $\alpha+x > \beta+ \psi$, τότε $\alpha > \beta$

15. Αν $\alpha \geq \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma \geq \beta + \delta$

16. Αν ο αριθμός x είναι το πολύ 5, τότε $x \leq 5$

17. Αν ο αριθμός x είναι τουλάχιστον 8 τότε $x \geq 8$

18. Αν ο αριθμός x δεν υπερβαίνει το 5 τότε $x < 5$

19. Η ανίσωση $-2x > -5x$ αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x.

20. Η ανίσωση $0 \cdot x < 3$ είναι αδύνατη .

21. Αν $x > 1$ τότε $2x-1 < 0$

22. Αν $x > 0$ τότε $x > 2x$

23. Αν $x < 0$ τότε $x > 2x$

24. Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\alpha^2 > \beta^2$

25. Αν $\dfrac{\alpha}{\beta} < 0$ τότε $\alpha \cdot \beta > 0$

26. Αν $\alpha < 0$ και $\beta \geq 0$ τότε $\alpha \cdot \beta < 0$

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η λύση της ανίσωσης $-2x < 4$ είναι:
α. 0, -2 **β.** Όλοι οι αριθμοί μικρότεροι του -2 γ. Όλοι οι αριθμοί μεγαλύτεροι του -2.

2. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος, για τον οποίο ισχύει $-3x > -7$:
α. -2 **β.** 2 **γ.** 0 **δ.** 1 **ε.** -1

3. Αν $x < 1$ τότε ποια από τις παρακάτω ανισότητες είναι λανθασμένη:
α. $1 + x < 2$ **β.** $x-2 < -1$ **γ.** $3-x > 2$ **δ.** $3x < 3$ **ε.** $x2 < 1$.

4. Αν $x(\psi - 1) < 0$ και $x > 0$, τότε ποια από τις παρακάτω σχέσεις είναι η σωστή.
α. $\psi = 1$ **β.** $\psi < 0$ **γ.** $\psi < 1$ **δ.** $\psi > 0$ **ε.** $\psi > 1$

5. Αν $\nu \in N^*$ τότε:

α. $\dfrac{\nu+1}{\nu} < 1$ **β.** $\dfrac{\nu+1}{\nu} > 1$ **γ.** $\dfrac{\nu+1}{\nu} < \dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Αν $1 < x < 2$, να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων:

α) $(1-x)(x-2)(x+3)x$ **β)** $(x+2)(x-\frac{1}{2})(x-3)(2-x)$

2. Αν $α < β$, να συγκριθούν οι αριθμοί:

α) $5α-5x$ και $5β-5x$ **β)** $\frac{3α+4x}{-5}$ και $\frac{3β+4x}{-5}$

3. Να αποδείξετε ότι, αν $α > β > γ$, τότε:

α) $(α-β)(β-γ)(2α-β) > 0$ **β)** $3α - β + γ > 2β + γ$

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς ισχύει: $0 < α < β$, να διατάξετε από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

α) $\frac{α}{β}, \frac{β}{α}$ και 1 **β)** $\frac{α}{α+β+1}, \frac{α}{α+β}$ και 1

5. Αν $0 < x < 1$ και $-2 < ψ < -1$, να βρεθεί μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $-x$ **β)** $-3ψ$ **γ)** $x+ψ$ **δ)** $x-ψ$ **ε)** $2x-3ψ$

6. Αν $0 < x < ψ$ τότε:

α) Να δείξετε ότι: $\frac{x-10}{x} < \frac{ψ-10}{ψ}$

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τα κλάσματα

$\frac{1997}{2007}, \frac{1998}{2008}, \frac{1999}{2009}$

7. Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις:

α) $4-\frac{3}{2}x > \frac{3}{8} - \frac{1}{6}(4x-12)$ **β)** $7(2x-3)-\frac{3(x-2)-1}{4} > \frac{x}{3} - 2$

γ) $\frac{3-2x}{6} > \frac{2x-1}{4}$ **δ)** $\frac{x-1}{4} < \frac{3x-5}{-2}$

8. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

α) $\frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3}$ και $2-x > 2x-8$

β) $(x+1)^2 > x(x+1)$ και $4x(x-1) \geq (2x-1)^2$

9. Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:

$-2(x-3) \geq 4(x-6)+5$ και $\frac{5(x-2)}{2} + 3 > \frac{3x+1}{2}$

10. Να βρεθούν οι τιμές του x, για τις οποίες ισχύει:

α) $x-1 \leq 2(1-2x) < 4-x$ **β)** $\frac{3x+2}{4} \leq x-1 \leq \frac{2-x}{3}$

11. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του λ, για τις οποίες το κλάσμα $\frac{2\lambda - 1}{4}$ να περιλαμβάνεται μεταξύ -2 και 3.

12. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος φυσικός αριθμός που επαληθεύει το σύστημα των ανισώσεων:

$5x - \frac{3-2x}{2} > \frac{7x-5}{2} + x$ (1) και $\frac{7x-2}{3} - 2x < 5 - \frac{x-2}{4}$ (2)

13. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα:

α) $3x + 4 = 2(x - 3)$ και $3(2x - 4) \leq 3 - 5(5 - x)$

β) $(4x - 1)(x - 3) = 0$ και $3x - 7 \leq -4x$

14. **α)** Να βρεθεί ο μικρότερος ακέραιος x που επαληθεύει την ανίσωση

$14{,}6 - \frac{25-x}{10} < 11{,}6 - \frac{20-2x}{10}$

β) Να βρεθεί ο μεγαλύτερος ακέραιος x που επαληθεύει την ανίσωση

$\frac{x-3}{2} - \frac{4x+2}{3} > \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

15. Τρείς διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί έχουν άθροισμα μεγαλύτερο του 12 και μικρότερο από το 17. Να βρείτε τους αριθμούς αυτούς.

16. Να βρείτε τον μικρότερο φυσικό αριθμό που το διπλάσιο του αυξημένο κατά 8 υπερβαίνει το 53.

17. Να βρείτε τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό που το τριπλάσιο του αυξημένο κατά 10 δεν υπερβαίνει το μισό του.

18. Ένας πλασιέ βιβλίων αμείβεται με 20 ευρώ για κάθε εγκυκλοπαίδεια που πουλάει. Τα ημερήσια έξοδά του είναι 35 ευρώ. Να υπολογίσετε πόσες εγκυκλοπαίδειες ώστε να έχει κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ σε 10 ημέρες.

19. Ένας πατέρας ρωτήθηκε πόσα παιδιά έχει και απάντησε: "Έχω 30 ευρώ. Αν δώσω από 8 ευρώ σε κάθε παιδί τότε δεν μου φθάνουν τα χρήματα που έχω. Αν όμως δώσω από 7 ευρώ σε κάθε παιδί, τότε περισσεύουν και χρήματα." Πόσα παιδιά είχε;

20. Έστω η παράσταση $A = 3x - 5$. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η παράσταση A

α) να παίρνει το πολύ την τιμή 10

β) να παίρνει τουλάχιστον την τιμή 5

γ) να υπερβαίνει το 0

δ) να παίρνει μη αρνητικές τιμές.