2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

Εξίσωση δευτέρου βαθμού (ή δευτεροβάθμια εξίσωση) με έναν άγνωστο ονομάζουμε κάθε εξίσωση που έχει έναν άγνωστο και η μεγαλύτερη δύναμη του αγνώστου είναι το 2.
Η λύση μιάς εξίσωσης 2ου βαθμού εξαρτάται από την μορφή της εξίσωσης.
Η γενική μορφή μιάς εξίσωσης 2ου βαθμού με άγνωστο x είναι:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{με } \alpha \neq 0$$

Οι αριθμοί α, β,γ λέγονται συντελεστές της εξίσωσης. Ο συντελεστής γ λέγεται και σταθερός όρος. Οι συντελεστές σε κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις είναι:

$x^2 + 8 = 0$: $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 8$
$-2x^2 -8 -3x = 0$: $\alpha = -2$, $\beta = -3$, $\gamma = -8$
$4x + 3x^2 = 0$: $\alpha = 3$, $\beta = 4$, $\gamma = 0$

Πώς λύνουμε μία εξίσωση δευτέρου βαθμού

Α. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων
Θυμόμαστε ότι ισχύει: Αν $\alpha \cdot \beta = 0$ τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$
Αν η εξίσωση είναι ελλειπής.

1) Αν $\gamma = 0$ δηλ έχει την μορφή: $\alpha x^2 + \beta x = 0$, με $\alpha \neq 0$. Οπότε η εξίσωση λύνεται ως εξής:
$\alpha x^2 + \beta x = 0$ ή $x(\alpha x + \beta) = 0$ ή $x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ ή $x = 0$ ή $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$

Παράδειγμα:
Να λυθούν: **α)** $x^2 + 3x = 0$, **β)** $x^2 = 6x$.
Λύση
α) $x^2 + 3x = 0$ ή $x(x + 3) = 0$ ή $x = 0$ ή $x + 3 = 0$ ή $x = 0$ ή $x = -3$.
β) $x^2 = 6x$ ή $x^2- 6x = 0$ ή $x(x -6) = 0$ ή $x = 0$ ή $x - 6 = 0$ ή $x = 0$ ή $x = 6$

2) Αν $\beta = 0$ τότε η εξίσωση έχει την μορφή : $\alpha x^2 + \gamma = 0$, με $\alpha \neq 0$
1ος τρόπος: Κάνουμε γινόμενο (αν γίνεται) την $\alpha x^2 + \gamma$.

Παράδειγμα:
Να λυθούν **α)** $x^2 - 4 = 0$, **β)** $4x^2 - 20 = 0$
Λύση
α) $x^2 - 4 = 0$ ή $x^2 - 2^2 = 0$ $(x - 2)(x + 2) = 0$ ή $x -2 = 0$ ή $x + 2 = 0$ ή $x = 2$
άρα $x = -2$

β) $4x^2-20=0$ ή $4(x^2-5)=0$ ή $4(x^2-\sqrt{5}^2)=0$ ή $4(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})=0$ ή
$x-\sqrt{5}=0$ ή $x+\sqrt{5}=0$ ή $x=\sqrt{5}$ ή $x=-\sqrt{5}$

2ος τρόπος: Την μεταφέρουμε στην μορφή: $x^2=\kappa$ και έχουμε:

- Αν $\kappa > 0$, τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x=\sqrt{\kappa}$ και $x=-\sqrt{\kappa}$.
- Αν $\kappa < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Αν $\kappa = 0$ τότε $x = 0$ (διπλή).

Παράδειγμα:

Να λυθούν
α) $3x^2 = 27$ **β)** $5x^2 - 20 = 0$.

Λύση

α) $3x^2 = 27$ ή $x^2=\frac{27}{3}$ ή $x^2=9$ ή $x=\pm\sqrt{9}$ ή $x=\pm 3$

β) $5x^2-20=0$ ή $5x^2=20$ ή $x^2=4$ ή $x=\pm 2$

Αν η εξίσωση είναι πλήρης οπότε γίνεται γινόμενο ως εξής:
$(x + \kappa) \cdot (x + \lambda) = 0$ π.χ. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 +5x - 6 = 0$.
Επειδή $-1 + 6 = 5$ και $-1 \cdot 6 = -6$ θα έχουμε $(x-1) \cdot (x+6)= 0$ ή $x - 1 = 0$ ή $x + 6 = 0$ άρα $x = 1$ ή $x = -6$.

1) Αν η εξίσωση είναι της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma = 0$ τότε βρίσκουμε δύο ακέραιους κ, λ για τους οποίους ισχύει: $\kappa + \lambda = \beta$ και $\kappa \cdot \lambda = \gamma$

2) Αν η εξίσωση είναι της μορφής $\alpha \cdot x^2 + \beta x + \gamma = 0$ ή $\alpha \neq 0$ τότε εφαρμόζουμε τη συμπλήρωση τετραγώνου ως εξής:

α) Πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους της εξίσωσης με 4α, όπου α ο συντελεστής του x^2.

β) Μεταφέρουμε στο β′ μέλος το σταθερό όρο και στο α′ μέλος δημιουργούμε παράσταση της μορφής $\alpha^2 + 2\alpha\beta$ ή $\alpha^2 - 2\alpha\beta$.

γ) Προσθέτουμε και στα δύο μέλη το β^2

δ) Σχηματίζεται μία από τις ταυτότητες:

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$
$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$$

Παράδειγμα:
Να λύσετε: $x^2 - 6x + 8 = 0$

Λύση
$x^2 - 6x + 8 = 0$ ή $4x^2 - 24x + 32 = 0$ ή $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 6 = -32$ ή $(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 6 + 6^2 = 6^2 - 32$ ή $(2x + 6)^2 = 4$

Άρα $2x+6 = \sqrt{4}$ ή $2x+6 = -\sqrt{4}$
$2x+6=2$ ή $2x+6=-2$
$2x=-4$ ή $2x=-8$
$x=-2$ ή $x=-4$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Ερωτήσεις σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ είναι 2ου βαθμού.

2. Η εξίσωση $\alpha x^{-2} + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ είναι 2ου βαθμού.

3. Η εξίσωση $x^2 - \alpha x = 0$ δεν είναι αδύνατη.

4. Η εξίσωση $x^2 - 4x = 0$ έχει μία λύση την $x = 4$.

5. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2^ου^ βαθμού με ένα θετικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει τις ίδιες ρίζες.

6. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2^ου^ βαθμού με έναν αρνητικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες.

7. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει ρίζα το 1 τότε $\alpha + \beta + \gamma = 0$

8. Η εξίσωση $x^2 - 2007 = 0$ έχει δύο λύσεις αντίθετες.

Β. Επίλυση εξισώσεων δευτέρου βαθμού με την βοήθεια τύπου.

Αν έχουμε την εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ τότε με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνων έχουμε: $αx^2 + βx + γ = 0$ ή
$4α \cdot αx^2 + 4α \cdot βx + 4α \cdot γ = 0$ ή $4α^2x^2 + 4αβx + 4αγ = 0$ ή
$(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β = -4αγ$ ή $(2αx)^2 + 2 \cdot 2αx \cdot β + β^2 = β^2 - 4αγ$ ή
$(2αx + β)^2 = β^2 - 4αγ$.

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $β^2 - 4αγ$ με το γράμμα Δ, τότε η εξίσωση γράφεται:
$(2αx + β)^2 = Δ$ και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν Δ>0, τότε έχουμε : $(2αx+β)^2=Δ$ ή $2αx+β=\pm\sqrt{Δ}$ ή $2αx=-β\pm\sqrt{Δ}$ ή $x=\dfrac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$.
  Άρα η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις τις $x=\dfrac{-β+\sqrt{Δ}}{2α}$ και $x=\dfrac{-β-\sqrt{Δ}}{2α}$
- Αν Δ=0, τότε έχουμε : $(2αx+β)^2=0$ ή $2αx+β=0$ ή $x=-\dfrac{β}{2α}$.
  Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή λύση την $x = -\dfrac{β}{2α}$

Η παράσταση $Δ = β^2 - 4αγ$ λέγεται **διακρίνουσα** γιατί μας επιτρέπει να διακρίνουμε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$
Τα παραπάνω συμπεράσματα περιέχονται στον πίνακα:

Αν Δ>0	Δύο ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-β\pm\sqrt{Δ}}{2α}$
Αν Δ=0	Αδύνατη
Αν Δ<0	Μία διπλή ρίζα $x=-\dfrac{β}{2α}$

Παραδείγματα:

Να λυθούν οι εξισώσεις:
α) $3x^2 - 4x + 1 = 0$, **β)** $-2x^2 - 4x + 6 = 0$

Λύση

α) Είναι α=3, β=-4, γ=1 οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 1 =$ $16-12=1>0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x=\dfrac{-\beta \pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{1}}{2\cdot 3}=$ $=\dfrac{4\pm 1}{2}$, δηλ είναι $x=\dfrac{4+1}{2}=\dfrac{5}{2}$, ή $x=\dfrac{4-1}{2}=\dfrac{3}{2}$.

β) Είναι α=-2, β=-4, γ=6 οπότε η διακρίνουσα είναι $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4\cdot(-2)\cdot(6) =$ $16+48=64>0$. Άρα η εξίσωση έχει δύο λύσεις, τις $x=\dfrac{-\beta \pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\dfrac{-(-4)\pm\sqrt{64}}{2\cdot(-2)}=$ $=\dfrac{4\pm 8}{-4}$, δηλ είναι $x=\dfrac{4+8}{-4}=-3$, ή $x=\dfrac{4-8}{-4}=1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Με την βοήθεια της διακρίνουσας μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε ένα τριώνυμο $2^{ου}$ βαθμού ως εξής:
Αν θέλουμε να κάνουμε γινόμενο το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τότε βρίσκουμε την διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (1) και έχουμε:

1. Αν $\Delta > 0$ τότε η (1) θα έχει δύο ρίζες άνισες τις ρ_1, ρ_1 και το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x-\rho_1)(x-\rho_2)$$

2. Αν $\Delta = 0$ τότε η (1) έχει μία διπλή ρίζα την $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$ και το τριώνυμο παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$$

3. Αν $\Delta < 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη και το τριώνυμο δεν γίνεται γινόμενο.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Ερωτήσεις του τύπου σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες όταν $Δ \geq 0$.

2. Η εξίσωση $3x - x^2 + 1 = 0$ έχει $Δ = -11$.

3. Η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$, $α \neq 0$ έχει πάντα δύο λύσεις άνισες, αν α και γ είναι ετερόσημοι.

4. Η εξίσωση $x^2 - αx = 0$ δεν είναι αδύνατη.

5. Μία εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει πραγματικές ρίζες όταν $Δ < 0$

6. Αν $β = 0$ και $γ > 0$ τότε η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ δεν έχει λύση.

7. Η εξίσωση $x^2 - 4x = 0$ έχει μία λύση την $x = 4$.

8. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2^{ου} βαθμού με ένα θετικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει τις ίδιες ρίζες.

9. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε όρο μιάς εξίσωσης 2ου βαθμού με έναν αρνητικό αριθμό τότε η νέα εξίσωση έχει αντίθετες ρίζες.

10. Αν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ έχει ρίζα το 1 τότε $α + β + γ = 0$

11. Αν η εξίσωση $αx^2 + βx + γ = 0$ με $α \neq 0$ έχει ρίζα το 0 τότε $γ = 0$

12. Κάθε εξίσωση 2^{ου} βαθμού έχει το πολύ δύο ρίζες.

13. Αν $κ \neq 1$, τότε η εξίσωση $x^2 -4x + κ - 1 = 0$ μπορεί να έχει ρίζα το 0.

14. Αν η εξίσωση $x^2 -4x + λ -5 =0$ έχει διπλή ρίζα τότε $λ = 9$

15. Η εξίσωση $αx^2 -x -α =0$, $α \neq 0$, έχει πάντοτε δύο άνισες ρίζες στο R.

16. Το τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$ γίνεται πάντα γινόμενο.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Η εξίσωση $x^2 - 3\alpha x + 4\alpha^2 = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει:
α. Δύο ρίζες άνισες πραγματικές **β.** Καμία ρίζα **γ.** Δύο ρίζες ίσες
δ. Δύο ρίζες πραγματικές.

2. Η εξίσωση $x(x^2 - 1) = 0$ έχει λύσεις:
α. 0, 1, -1 **β.** 0, 1 **γ.** 0, -1 **δ.** είναι αδύνατη

3. Αν η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ δεν έχει ρίζες, ποια από τις παρακάτω εξισώσεις δεν έχει επίσης ρίζες:
α. $x^2 - \beta x - \gamma = 0$, **β.** $-x^2 + \beta x + \gamma = 0$ **γ.** $\gamma x^2 - \beta x + 1 = 0$, $\gamma \neq 0$
δ. $\gamma x^2 + \beta x - 1 = 0$ $\gamma \neq 0$

4. Αν η εξίσωση $x^2 - 4x + 4\lambda = 0$ έχει δύο ρίζες άνισες τότε για το λ ισχύει:
α. $\lambda < 1$ **β.** $\lambda > 1$ **γ.** $\lambda > 3$ **δ.** $\lambda \leq 1$

5. Αν η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες τότε η μεγαλύτερη ακέραια τιμή του λ είναι:
α. 9 **β.** 8 **γ.** -9 **δ.** -8

6. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης : $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ τότε η παράσταση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ίση με:
α. $(x- \rho_1)(x- \rho_2)$ **β.** $\alpha(x- \rho_1)(x- \rho_2)$ **γ.** $-\alpha(x- \rho_1)(x- \rho_2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
α) $3x^2 - 27 = 0$ **β)** $4x^2 - 16 = 0$ **γ)** $x^2 - 5 = 0$ **δ)** $x^2 - 9 = 0$ **ε)** $x^2 - 1 = 0$
στ) $x^2 + 6 = 0$ **ζ)** $x^2 + 8 = 0$ **η)** $3x^2 + 48 = 0$

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
α) $3x^2 - 2x = 0$ **β)** $16x - x^2 = 0$ **γ)** $\sqrt{2}x^2 - 4x = 0$ **δ)** $-x^2 = x$ **ε)** $x^2 = x$
στ) $3x^2 = 6x$ **ζ)** $x = 2x^2$ **η)** $7x = -14x^2$

3. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
α) $3x^2 - 1 = 2(x^2 + 12)$ **β)** $3x^2 - 4x = -8x$ **γ)** $(x-2)(x + 2) + (1- 2x)(1+ 2x) = 0$
δ) $-x^2 = 10x + 25$ **ε)** $7x = x^2 - 18$ **στ)** $x^2 = x-1$ **ζ)** $3x^2 = 2x - 4$

4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $(2x-3)^2 = (x-1)(x+4) + 9x$ **β)** $9(\alpha^2-2) - 8\alpha = 4\alpha(2\alpha-1)+14$

γ) $(\lambda+2)(7\lambda-1) = (4\lambda+5)(5\lambda-3)$ **δ)** $\frac{7}{4} - (3x-1)^2 = \frac{3}{2}(4x-1)$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις

α) $\frac{2x^2+1}{3} + \frac{x+1}{4} = (x+2)^2$ **β)** $\frac{x(x+2)}{3} + \frac{x(x-1)}{4} = \frac{x^2+2}{6} + \frac{1}{2}$

γ) $\frac{x^2+5}{9} - \frac{x-2}{4} = \frac{2(1-x)}{3}$ **δ)** $\frac{4x^2+1}{5} - \frac{x+1}{2} = \frac{x^2+1}{4} - x$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις
α) $x^3 - 5x^2 - 6x = 0$ **β)** $x^3 = 2x^2 + 3x$ **γ)** $x^2(x-2) - 2x(2-x) + x - 2 = 0$
δ) $x^2(3-x) + x(x-3) + 6(x-3) = 0$ **ε)** $(x+2)^3 + x2 - 4 = 0$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $x^2+(2\sqrt{2}+3)x+3\sqrt{2}+4=0$ **β)** $x^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})x+\sqrt{15}=0$

γ) $\sqrt{2}x^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})x+\sqrt{6}=0$ **δ)** $\sqrt{3}x^2 - x - \sqrt{12} = 0$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις

α) $-2x^2+4{,}6x-2{,}4=0$ **β)** $0{,}002x^2+4{,}004x-1{,}01=0$ **γ)** $x-\sqrt{x}-20=0$

δ) $x-3\sqrt{x}+2=0$ **ε)** $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

9. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 2x + 4\lambda = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση
α) Να έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές
β) Να έχει δύο ρίζες ίσες
γ) Να μην έχει πραγματικές ρίζες.

10. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση $x^2 - 3x + \lambda^2 + 7\lambda = 0$ να έχει ρίζα τον αριθμό -2.

11. Δίνεται η εξίσωση $(x+\lambda)^2 - 2(\lambda - x) = 7$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζα το 2;

12. Αν κ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 3x - 5 = 0$ να βρείτε την τιμή των παραστάσεων
A $= \kappa^2 - 3\kappa$
B $= \kappa^2 - 3\kappa + 10$

13. Να βρεθεί ο λ R, ώστε η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0$ να έχει ρίζα το 2. Μετά να αποδειχθεί ότι η ρίζα είναι διπλή .

14. Να βρεθούν οι τιμές του λ R ώστε η εξίσωση:
$(\lambda^2 - 3\lambda + 2)x^2 + 3x - 2007 = 0$ να είναι $2^{ου}$ βαθμού.

15. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 6x - \frac{3\Delta}{4} = 0$ (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της (1)

16. Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - \Delta x + 2\Delta = 0$ (1) όπου Δ είναι η διακρίνουσα της (1)

17. Να παραγοντοποιήσετε τα παρακάτω τριώνυμα με την βοήθεια της διακρίνουσας .

α) $6x^2-x-1$ **β)** x^2-x-2 **γ)** $2x^2-x-1$ **δ)** $4x^2-4x+1$ **ε)** $\frac{1}{3}x^2-2x+3$

στ) $2x^2+4x+3$ **ζ)** $3x^2-4x+1$

18. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

$$\mathbf{A}=\frac{3x^2-x-2}{x^2+x-2},\quad \mathbf{B}=\frac{x^3-3x^2+2x}{2x^2-x-1}\quad \mathbf{\Gamma}=\frac{3x^2+19x-14}{6x^2-x-2}$$

19. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 4x + \lambda - 1$. Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ ώστε:

α) Το παραπάνω τριώνυμο να αναλύεται σε γινόμενο.

β) Το παραπάνω τριώνυμο να μην αναλύεται.

γ) Το παραπάνω τριώνυμο να είναι τέλειο τετράγωνο.

20. Να παραγοντοποιήσετε την παρακάτω παράσταση:

α) $x^3 - 6x^2 + 5x = 0$ **β)** $x^4 + 5x^3 - 6x^2 = 0$