

1.6 Λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με διαστάσεις α , β . Αν σχεδιάσουμε το ορθογώνιο Α'Β'Γ'Δ' το οποίο είναι όμοιο με το αρχικό και έχουν λόγο λ τότε: οι διαστάσεις θα είναι: $\lambda\alpha$, $\lambda\beta$ οπότε για τα εμβαδά έχουμε:

$$\frac{E_{\text{Α'Β'Γ'Δ'}}}{E_{\text{ΑΒΓΔ}}} = \frac{\lambda\alpha \cdot \lambda\beta}{\alpha \cdot \beta} = \lambda^2 .$$

Γενικά για τα όμοια σχήματα ισχύει το συμπέρασμα:

Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Πάνω στην ΑΒ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $AB = 2AD$. Από το σημείο Δ φέρνουμε παράλληλη στη ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να δείξετε ότι:

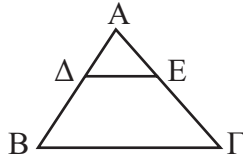
- α)** Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας.
β) Αν το εμβαδόν του ΑΔΕ είναι 10cm^2 , να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓ.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΕ, έχουν:

- i)** \hat{A} κοινή **ii)** $\hat{B} = \hat{E}$ (ως εντός και επι τα αυτά). Άρα είναι όμοια διότι έχουν τις δύο γωνίες τους ίσες.

Οπότε : $AB\Gamma \approx A\Delta E$ άρα : $\frac{AB}{A\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{A E} = \lambda$ ή $\lambda = \frac{AB}{A\Delta} = \frac{2A\Delta}{A\Delta} = 2$



- β)** Για τα εμβαδά ισχύει : $\frac{(AB\Gamma)}{(A\Delta E)} = \lambda^2$ ή $\frac{(AB\Gamma)}{10} = 2^2$ ή $(AB\Gamma) = 40\text{cm}^2$

2

Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 30%, να βρείτε πόσο % θα αυξηθεί το εμβαδόν του.

Λύση

Έστω α είναι η πλευρά του τετραγώνου και E είναι το εμβαδόν του. Τότε η πλευρά του θα γίνει $\alpha' = \alpha + 0,3\alpha = 1,3\alpha$. Τα τετράγωνα είναι όμοια με

λόγο ομοιότητας $\lambda = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1,3\alpha}{\alpha} = 1,3$. Για τα εμβαδά θα ισχύει:

$$\frac{E'}{E} = \lambda^2 \text{ ή } \frac{E'}{E} = 1,3^2 \text{ ή } E' = 1,69E \text{ Οπότε η αύξηση είναι: } E' - E = 0,69 = 69\%$$

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ο λόγος των εμβαδών δύο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων των σχημάτων.
2. Ο λόγος των εμβαδών δύο τετραγώνων είναι 4. Τότε ο λόγος των πλευρών τους είναι 2.
3. Δύο κύκλοι είναι πάντα όμοιοι.
4. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές 6cm, 3cm. Τότε είναι όμοιο με ένα άλλο ορθογώνιο με κάθετες 8cm και 4 cm.
5. Δύο κύκλοι έχουν ακτίνες $\rho_1 = 3\text{cm}$, $\rho_2 = 6\text{cm}$ τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι 4.
6. Αν η πλευρά ενός τετραγώνου αυξηθεί κατά 20% τότε το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 40%.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν τετραπλάσιο ενός άλλου με πλευρά 5cm. Τότε η πλευρά του είναι:
α. 10 cm, **β.** 5 cm, **γ.** 20 cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω
2. Ένα τετράπλευρο έχει εμβαδό 50cm^2 . Αν τριπλασιαστούν οι πλευρές του, τότε το νέο πολύγωνο θα έχει εμβαδό:
α. 450cm^2 , **β.** 150cm^2 , **γ.** 100cm^2 **δ.** τίποτα από τα παραπάνω
3. Σε ένα τοπογραφικό σχέδιο ένα οικόπεδο έχει σχήμα ορθογωνίου, παραλληλογράμμου με πλευρές 20cm και 15cm. Αν η κλίμακα είναι 1: 100, το οικόπεδο έχει εμβαδόν.
α. 300m^2 , **β.** 200m^2 , **γ.** 100m^2 **δ.** τίποτα από τα παραπάνω

- 1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ // ΒΓ. Αν ΔΕ = 3, ΓΒ = 9 και (ΑΒΓ) = 100cm², να βρείτε το (ΑΔΕ).
- 2 Αν κάθε πλευρά ενός τετραγώνου μειωθεί κατά 30%, να βρείτε πόσο θα μειωθεί το εμβαδόν του.
- 3 Οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου αυξήθηκαν κατά 110% (διότι ο ιδιοκτήτης αγόρασε και τα διπλανά οικοπέδα). Να βρείτε πόσο % αυξήθηκε το εμβαδόν του οικοπέδου.
- 4 Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 10 cm. Να βρείτε την πλευρά του ισοπλευρού το οποίο έχει το τετραπλάσιο εμβαδόν.
- 5 Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε ΔΕ // ΒΓ. Αν ΑΔ = 2, ΔΒ = x + 2 και $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{9}$, να βρείτε το x.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), με ΒΓ = 12 cm. Παίρνουμε στη βάση σημείο Κ τέτοιο ώστε: ΒΚ = 5 ΚΓ. Από το Κ φέρνουμε: ΚΔ ⊥ ΑΓ και ΚΕ ⊥ ΑΒ. Να δείξετε ότι:
 - α) Τα τρίγωνα ΚΔΓ, ΚΕΒ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.
 - β) Αν το τρίγωνο ΚΕΒ έχει εμβαδόν 100cm², να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΚΔΓ.
- 2 Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει πλευρές 2 cm και 6 cm. Ένα δεύτερο ορθογώνιο είναι όμοιο με το αρχικό και έχει διαγώνιο 15 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του δευτέρου ορθογωνίου. (Διαγωνισμός Ε.Μ.Ε.)
- 3 Ένα κανονικό δεκάγωνο έχει πλευρά 8cm και εμβαδόν 100cm². Ένα άλλο κανονικό δεκάγωνο έχει περίμετρο 40cm. Αποδείξτε ότι:
 - α) Τα δύο πολύγωνα είναι όμοια.
 - β) Το εμβαδόν του δευτέρου πολυγώνου είναι 25 cm².