1.5 Ομοιότητα

Α Ομοια πολύγωνα

Δύο πολύγωνα Π και Π′ που το ένα είναι μεγέθυνση ή σμίκρυνση του άλλου τα λέμε όμοια και τα συμβολίζουμε Π≈ Π′.

Έτσι αν δύο πολύγωνα είναι ομοιόθετα τότε είναι **όμοια**.
Δύο πολύγωνα είναι όμοια όταν: Έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Αν έχουμε δύο όμοια πολύγωνα τότε δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές έχουν τον ίδιο λόγο και λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται λόγος ομοιότητας.

Αν δύο πολύγωνα είναι όμοια, τότε έχουν τις ομόλογες πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες. (Αυτό ισχύει διότι δύο πολύγωνα είναι όμοια, αν είναι ή μπορεί να γίνουν ομοιόθετα και επομένως θα ισχύουν οι ιδιότητες των ομοιόθετων σχημάτων)

Ο λόγος των περιμέτρων δύο ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας τους, διότι: Αν έχουμε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Α′Β′Γ′Δ′ το ομοιόθετο του με κέντρο Ο και λόγο λ τότε έχουμε:

$$\lambda=\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'\Gamma'}{B\Gamma}=\frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta}=\frac{\Delta'A'}{\Delta A}=\frac{A'B'+B'\Gamma'+\Gamma'\Delta'+\Delta'A'}{AB+B\Gamma+\Gamma\Delta+\Delta A}=\frac{\text{Περίμετρος } \Pi'}{\text{Περίμετρος } \Pi}$$

Λόγος ομοιότητας - Κλίμακα

Οι χάρτες συνήθως παρουσιάζουν μία γεωγραφική περιοχή σε σμίκρυνση.

Το μέγεθος της σμίκρυνσης καθορίζεται από την κλιμακα του χάρτη και αναγράφεται πάνω στο χάρτη. Η κλίμακα του χάρτη είναι ο λόγος της απόστασης δύο σημείων στο χάρτη προς την πραγματική απόσταση των αντίστοιχων σημείων.

Για παράδειγμα όταν η κλίμακα ενός χάρτη είναι 1:100.000, αυτό σημαίνει ότι η απόσταση 1 cm στο χάρτη αντιστοιχεί σε πραγματική απόσταση 100.000 cm = 1000m = 1km.

Παρατήρηση:

Δύο κανονικά πολύγωνα που έχουν το ίδιο πλήθος πλευρών είναι όμοια.

Β. Όμοια τρίγωνα

Δύο τρίγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις αντίστοιχες γωνίες ίσες.
Κριτήρια ομοιότητας τριγώνων.

- Αν δύο τρίγωνα τις πλευρές τους ανάλογες, τότε είναι όμοια.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ανάλογες και την γωνία που περιέχεται από αυτές ίση, τότε είναι όμοια.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.

Παρατήρηση:

Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε πρέπει να ξέρουμε να γράφουμε τους λόγους ομοιότητας. Για να γράψουμε τους λόγους ομοιότητας πρέπει να ξέρουμε την ισότητα των γωνιών. Έτσι έχουμε: Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ έχουν $\hat{A}=\hat{\Delta}$, $\hat{B}=\hat{Z}$, $\hat{\Gamma}=\hat{E}$ τότε γράφουμε τα τρίγωνα με τα γράμματα να αντιστοιχούν στις ίσες γωνίες δηλ, ΑΒΓ, ΔΖΕ. Στην συνέχεια παίρνουμε τους λόγους ως εξής: Κάθε φορά ο αριθμητής θα σχηματίσετε με γράμματα από το ίδιο τρίγωνο και ο παρονομαστής με γράμματα από το άλλο τρίγωνο αλλά με την σειρά που πήραμε τα γράμματα στον αριθμητή δηλ. $\dfrac{AB}{\Delta Z}=\dfrac{B\Gamma}{ZE}=\dfrac{A\Gamma}{\Delta E}$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

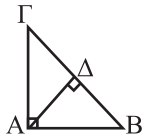
1 Δίνεται τρίγωνο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ($\hat{A}=90^0$). Φέρνουμε το ύψος ΑΔ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα ΑΓΒ, ΑΓΔ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

β) Τα ΑΓΒ, ΑΔΒ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΑΓΔ , ΑΒΓ έχουν: 1) $\hat{Γ}$ κοινή , 2) $Γ\hat{Α}Β = Α\hat{Γ}Δ = 90^0$.
Άρα είναι όμοια (έχουν τις δύο γωνίες ίσες) , οπότε : ΓΑΔ ≈ ΓΔΑ και
έχουμε: $\frac{ΓΑ}{ΑΓ} = \frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{ΓΒ}{ΑΔ}$



β) Τα τρίγωνα ΑΔΒ , ΑΓΒ έχουν: 1) $\hat{Β}$ κοινή, 2) $Γ\hat{Α}Β = Α\hat{Δ}Β = 90^0$.
Άρα είναι όμοια (έχουν τις δύο γωνίες ίσες), οπότε : ΒΑΓ ≈ ΒΔΑ και
$\frac{ΒΑ}{ΒΔ} = \frac{ΑΓ}{ΔΑ} = \frac{ΒΓ}{ΒΑ}$

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν το Κ είναι μέσον του ΑΒ, Λ είναι το μέσον του ΑΓ και Μ είναι το μέσον του ΒΓ. Να δείξετε ότι τα ΓΜΛ , ΑΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας. Τα ΒΚΜ, ΜΛΓ είναι όμοια

Λύση

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΓΜΛ έχουν:

α) $\hat{Γ}$ κοινή , **β)** $Μ\hat{Λ}Γ = \hat{Α}$ (ως εντός και επι τα αυτά) . Άρα είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες . Έτσι έχουμε : ΓΑΒ ≈ ΓΛΜ οπότε
$\frac{ΓΑ}{ΓΛ} = \frac{ΑΒ}{ΛΜ} = \frac{ΓΒ}{ΓΜ}$

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΚΜ έχουν:

α) $\hat{Β}$ κοινή , **β)** $Β\hat{Κ}Μ = \hat{Α}$ (ως εντός και επι τα αυτά) . Άρα είναι όμοια διότι έχουν δύο γωνίες ίσες . Οπότε τα ΒΚΜ , ΜΛΓ είναι όμοια διότι και τα δύο είναι όμοια στο τρίγωνο ΑΒΓ

3 Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με $\hat{Α} = \hat{Δ}$ και $\hat{Β} = \hat{Ε}$. Αν ΑΒ = 10cm ΒΓ = 8cm και ΑΓ = 12cm. Το τρίγωνο ΔΕΖ έχει περίμετρο 15 cm.
Να βρείτε το λόγο ομοιότητας των τριγώνων και τις πλευρές του ΔΕΖ.

Λύση

Τα τρίγωνα είναι όμοια άρα ο λόγος ομοιότητας είναι ίσος με το λόγο των περιμέτρων . Έτσι έχουμε : ΑΒΓ ≈ ΔΕΖ οπότε

$\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΔΖ} = \frac{ΒΓ}{ΕΖ} = \frac{ΑΒ+ΑΓ+ΒΓ}{ΔΕ+ΔΖ+ΕΖ} = \frac{30}{15} = 2$ Άρα ο λόγος ομοιότητας είναι :

λ=2 . Οπότε $\frac{ΑΒ}{ΔΕ} = 2$ ή $\frac{10}{ΔΕ} = 2$ ή 2ΔΕ=20 ή ΔΕ=10cm , $\frac{ΑΓ}{ΔΖ} = 2$ ή $\frac{12}{ΔΖ} = 2$

ή 2ΔΖ=12 ή ΔΖ=6cm , $\frac{ΒΓ}{ΕΖ} = 2$ ή $\frac{8}{ΕΖ} = 2$ ή 2ΕΖ=8 ή ΕΖ=4 cm .

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

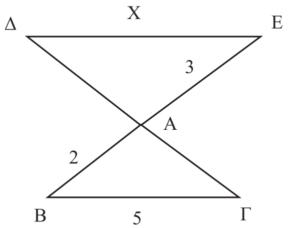
1. Δύο ίσα τρίγωνα είναι όμοια.
2. Δύο τετράγωνα είναι πάντα όμοια.
3. Δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι πάντα όμοια.
4. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
5. Δύο πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι πάντα όμοια μεταξύ τους.
6. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε είναι όμοια.
7. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με ίσες υποτείνουσες είναι όμοια.
8. Δύο κανονικά πολύγωνα είναι πάντα όμοια.
9. Δύο ορθογώνια που έχουν από μία οξεία γωνία ίση είναι όμοια.
10. Ο λόγος των υψών δύο ομοίων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας.
11. Δύο ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι όμοια.
12. Δύο παραλληλόγραμμα είναι πάντα όμοια.
13. Ο λόγος ομοιότητας δύο ίσων τριγώνων είναι 0.

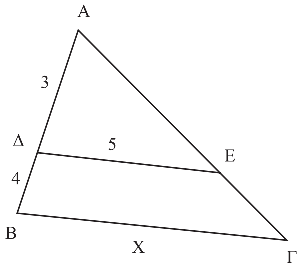
Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

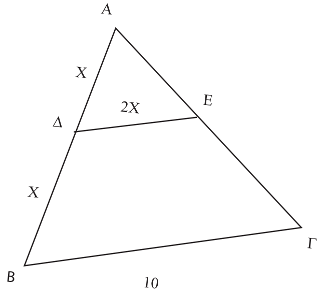
1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές: $\alpha = 6$, $\beta = 10$, $\gamma = 8$. Το τρίγωνο ΚΛΜ είναι όμοιο με το ΑΒΓ και έχει περίμετρο 48. Τότε η μεγαλύτερη πλευρά του ΚΛΜ είναι:
   α. 20, **β.** 16, **γ.** 12, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τα ύψη του ΑΖ, ΒΕ. Το τρίγωνο ΒΕΓ είναι όμοιο με το τρίγωνο:
   α. ΑΖΓ, **β.** ΑΒΕ, **γ.** ΑΒΓ, **δ.** κανένα από τα προηγούμενα.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν ΒΓ = 10cm, ΓΔ = 2cm. Τότε το ύψος ΑΔ είναι:
   α. 4 cm, **β.** 8 cm, **γ.** 2 cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.
4. Αν στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΔΕ είναι όμοια και ΑΔ = 2cm, ΔΒ = 8cm, ΒΓ = 16cm τότε η ΔΕ είναι ίση με:
   α. 4cm, **β.** 8cm, **γ.** 2cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 **α)** Αν ΔΕ // ΒΓ, να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι όμοια.
β) Να βρείτε το x σε κάθε περίπτωση.







2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 8cm, ΑΓ = 12cm. Πάνω στις ΑΒ, ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε τέτοια ώστε: ΑΔ = 2 cm, ΑΕ = 3cm.
α) Να δείξετε ότι ΔΕ // ΒΓ.
β) Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΑΒΓ είναι όμοια.
γ) Αν ΔΕ = 4cm,να βρείτε την πλευρά ΒΓ.

3 Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΓΕ και ΒΖ. Να δείξετε ότι:
α) Τα ΑΒΔ, ΕΒΓ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.
β) Τα ΑΕΓ, ΑΒΖ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

4 Δίνεται τρίγωνο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ του ΒΓ φέρνουμε ΜΚ $\perp$ ΑΒ και ΜΛ $\perp$ ΑΓ. Να αποδείξετε ότι: **α)** Τα ΒΚΜ, ΑΒΔ είναι όμοια και να γραψετε τους λόγους ομοιότητας.
β) Τα ΑΔΓ, ΜΛΓ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον περιγεγραμένο κύκλο στο Ε. Να αποδείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΔΕΓ είναι όμοια.
β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΒΔΕ είναι όμοια.

6 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τον περιγγεγραμμένο κύκλο του. Αν ΑΔ είναι το ύψος του και ΑΕ είναι διάμετρος, να δείξετε ότι τα ΑΒΔ και ΑΕΓ είναι όμοια και να γράψετε τους λόγους ομοιότητας.

7 Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος ομοιότητας αυτών είναι ίσος με το λόγο δύο ομόλογων υψών του τριγώνου.

8 Δίνεται παραλληλόγραμο ΑΒΓΔ. Από το Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει την ΒΔ στο Κ, την ΔΓ στο Λ και την προέκταση της ΒΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι: **α)** Τα τρίγωνα ΑΔΚ, ΚΒΜ είναι όμοια.
β) Τα τρίγωνα ΔΚΛ, ΑΚΒ είναι όμοια.