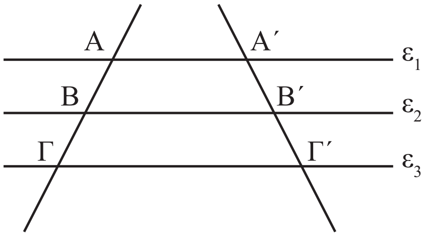
1.3 Θεώρημα του Θαλή

Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε: Τα τμήματα που ορίζονται στην μία είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα που ορίζονται στην άλλη. Δηλαδή:

αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ τότε $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$ (1)



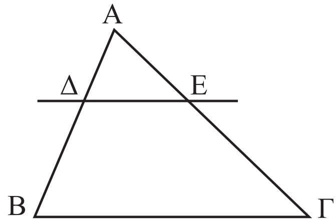
Από την ισότητα (1) μπορούν να προκύψουν:

$\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ και $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$

Παρατήρηση:

Για δύο σημεία Δ, Ε των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύουν:

- Αν ΔΕ // ΒΓ τότε $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$.
- Αν $\dfrac{A\Delta}{\Delta B} = \dfrac{AE}{E\Gamma}$ τότε ΔΕ // ΒΓ .

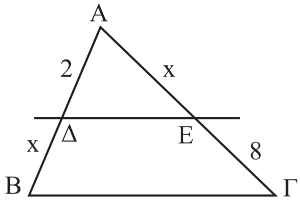


Το δεύτερο συμπέρασμα από τις παρατηρήσεις χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να δείξουμε ότι: ότι δύο τμήματα είναι παράλληλα.

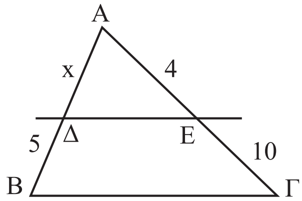
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΛΥΜΕΝΕΣ

1 Στο τρίγωνο ΑΒΓ η (ε) είναι παράλληλη στη ΒΓ. Να υπολογίσετε το x σε κάθε περίπτωση:

α)



β)



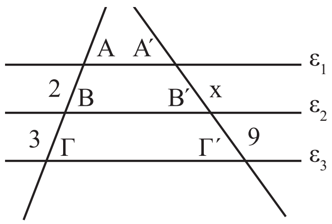
Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ}$ ή $\frac{2}{x}=\frac{x}{8}$ ή $x^2=16$ ή $x=4$.

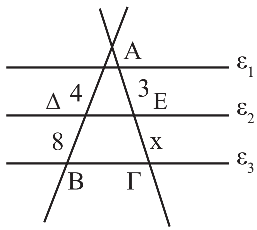
β) Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ // ΒΓ, οπότε από το θεώρημα του Θαλή έχουμε $\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ}$ ή $\frac{x}{4}=\frac{5}{10}$ ή $10x=20$ ή $x=2$.

2 Αν $ε_1$ // $ε_2$ // $ε_3$, να υπολογίσετε το x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α)



β)



Λύση

α) Είναι $ε_1$ // $ε_2$ // $ε_3$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

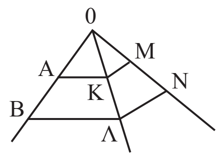
$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'}=\frac{ΒΓ}{Β'Γ'} \text{ ή } \frac{2}{x}=\frac{3}{9} \text{ ή } 3x=18 \text{ ή } x=6$$

β) Είναι $ε_1$ // $ε_2$ // $ε_3$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή έχουμε:

$$\frac{ΑΔ}{ΑΕ}=\frac{ΔΒ}{ΕΓ} \text{ ή } \frac{4}{3}=\frac{8}{x} \text{ ή } 4x=24 \text{ ή } x=6.$$

3 Στο παρακάτω σχήμα είναι: ΑΚ // ΒΛ και ΚΜ // ΛΝ.

Να δείξετε ότι: $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OM}{MN}$.



Λύση

Στο τρίγωνο ΟΒΛ είναι ΑΚ // ΒΛ. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή:

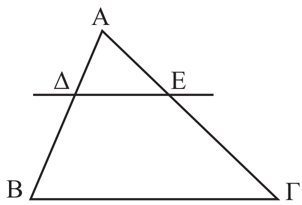
$\dfrac{OA}{OK} = \dfrac{AB}{K\Lambda}$ ή $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OK}{K\Lambda}$ (1) . Στο τρίγωνο ΟΛΝ είναι ΚΜ//ΛΝ. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Θαλή : $\dfrac{OK}{OM} = \dfrac{K\Lambda}{MN}$ ή $\dfrac{OK}{K\Lambda} = \dfrac{OM}{MN}$ (2) .

Από (1) και (2) $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OM}{MN}$.

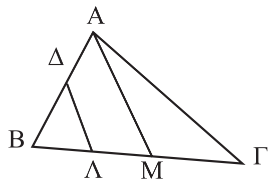
Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

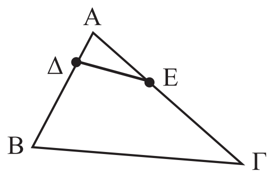
1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΔΕ // ΒΓ. Τότε $\dfrac{A\Delta}{E\Gamma} = \dfrac{AE}{\Delta B}$



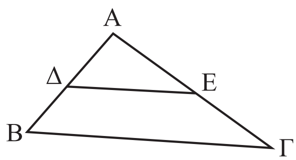
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι διάμεσος και Δ μέσον της ΑΒ, Λ μέσον της ΒΜ, τότε ΔΛ // ΑΜ .



3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΔ = 3, ΔΒ = 6, ΑΕ = 5, ΕΓ = 8, τότε η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΒΓ .

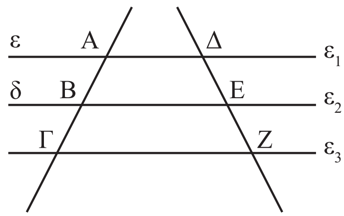


4. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ //ΒΓ. Αν ΑΔ = 4, ΑΕ = 2 και ΑΒ = 12, τότε η ΕΓ δεν υπολογίζεται.



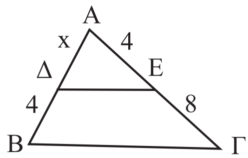
5. Αν ε // δ // ζ τότε ισχύει:

$$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{\Delta E}{EZ}$$

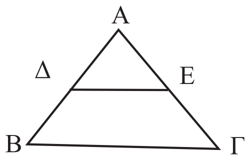


B. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

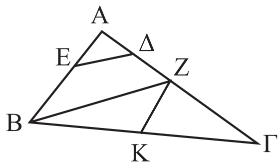
1. Στο τρίγωνο είναι ΔΕ // ΒΓ.
Τότε η τιμή του x είναι:
α. 4, **β.** 2 **γ.** 6, **δ.** καμία από τα παραπάνω .



2. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΔΕ// ΒΓ. Αν ΑΔ = x + 2, ΑΕ = 3, ΔΒ = 4, ΕΓ = 2. Τότε η τιμή του x είναι:
α. 4, **β.** 6, **γ.** 8, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.



3. Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΕΔ // ΒΖ, ΖΚ // ΑΒ.
Αν ΑΕ = 4, ΕΒ = 8, ΑΔ = 1, ΔΖ = 2, ΖΓ = 6, ΒΚ = 5. Τότε η τιμή του ΚΓ είναι:
α. 10, **β.** 6, **γ.** 4, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ). Οι διαγώνιες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Ο

Να δείξετε ότι: **α)** $\frac{OA}{O\Gamma}=\frac{OB}{O\Delta}$, **β)** $\frac{OA}{A\Gamma}=\frac{OB}{B\Delta}$

2 Στο οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΓΕ. Στο τρίγωνο ΒΕΓ φέρνουμε το ύψος ΕΚ. Να δείξετε ότι:

α) ΕΚ //ΑΔ

β) $\frac{BE}{EA}=\frac{BK}{B\Delta}$

3 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ του τμήματος ΔΓ φέρνουμε // ΑΔ, η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την ΑΒ στο Ε. Να δείξετε ότι:

α) $\frac{ΒΔ}{ΔΜ} = \frac{ΒΑ}{ΑΗ}$, **β)** $\frac{ΓΜ}{ΔΜ} = \frac{ΓΖ}{ΑΖ}$

4 Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 12cm και ΑΓ= 8cm. Πάνω στη διάμεσο ΑΜ, παίρνουμε ένα σημείο Κ τέτοιο ώστε: $\frac{ΑΚ}{ΚΜ} = \frac{1}{3}$. Από το Κ φέρνουμε ευθεία (ε) // στην ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε τα τμήματα ΑΖ, ΑΕ.

5 Στο τρίγωνο ΑΒΓ δίνεται ότι: ΔΕ // ΑΒ, ΕΖ // ΑΔ.
Αν ΑΕ = x, ΕΓ = 12, ΒΔ = ψ, ΔΖ = 2x, ΖΓ = 4,
Να υπολογίσετε τα x, ψ.

6 Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την ΒΓ προς το μέρος του Β και του Γ και παίρνουμε σημεία Κ, Λ αντίστοιχα τέτοια ώστε: ΒΚ = ΓΛ.
Από το Κ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΒ και από το Λ παράλληλη στην ΑΓ που τέμνονται στο Ν. Αν η ΝΑ τέμνει την ΒΓ στο Μ, να δείξετε ότι:

α) $\frac{ΜΒ}{ΒΚ} = \frac{ΜΑ}{ΑΝ}$, **β)** $\frac{ΜΓ}{ΓΛ} = \frac{ΜΑ}{ΑΝ}$ **γ)** Το Μ είναι μέσον του ΒΓ .