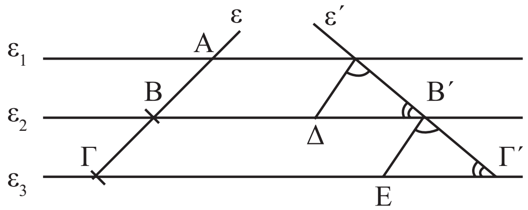
1.2 Λόγος ευθυγράμμων τμημάτων

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

Αν τρεις ή περισσότερες παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μία ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη:

Έστω ε_1, ε_2, ε_3 είναι τρεις παράλληλες ευθείες που τέμνουν την ευθεία ε στα Α, Β, Γ έτσι ώστε: ΑΒ = ΒΓ. Αν ε′ είναι μία άλλη ευθεία που τέμνει τις ε_1, ε_2, ε_3 στα Α′, Β′, Γ′ αντίστοιχα.



Θα δείξουμε ότι : Α′Β′ = Β′Γ′.
Αν φέρουμε Α′Δ// ε, Β′Ε //ε τότε:
Τα τρίγωνα Α′ΔΒ′, Β′ΕΓ′ έχουν: **α)** Α′Δ = Β′Ε, διότι τα ΑΒΔΑ′, ΒΓΕΒ′ είναι παραλληλόγραμμα (έχουν τις απέναντι πλευρές παράλληλες) και ΑΒ = ΓΔ. **β)** $\Delta\hat{B}'A' = E\hat{\Gamma}'B'$ (ως εντός και επί τα αυτά).

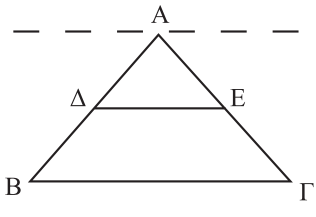
γ) $\Delta\hat{A}'B' = E\hat{B}'\Gamma'$. (ως εντός και επί τα αυτά). Άρα $\hat{\Delta} = \hat{E}$
Οπότε τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα θα έχουν και τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα οπότε: Α′Β′ = Β′Γ′.

Μέσα πλευρών τριγώνου

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, αν από το μέσο Δ της πλευράς φέρουμε παράλληλη προς μία άλλη πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται απο το μέσον της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

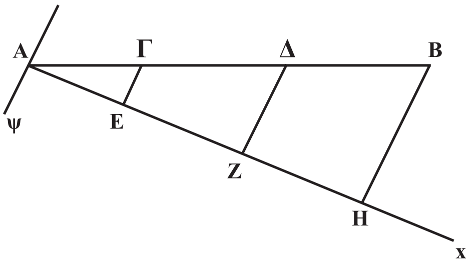
Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Από το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ φέρουμε την ΜΝ // ΒΓ. Τότε αν από την κορυφή Α φέρουμε ευθεία ε // ΒΓ, τότε οι παράλληλες ε, ΜΝ, ΒΓ ορίζουν ίσα τμήματα στην ΑΒ άρα θα ορίζουν και ίσα τμήματα στην ΑΓ. Άρα ΑΝ = ΝΓ.



Διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε ν ίσα τμήματα

Έστω έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 7cm και θέλουμε να το διαιρέσουμε σε τρία ίσα τμήματα, τότε το μήκος κάθε τμήματος θα είναι 2,3333…cm, οπότε δεν μπορούμε να τα προσδιορίσουμε με ακρίβεια.

Μπορούμε όμως να δουλέψουμε ως εξής:



Από το Α φέρνουμε μία τυχαία ημιευθεία Αx και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε με το διαβήτη τρία διαδοχικά ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Ενώνουμε τα σημεία Β, Η και από τα σημεία Ζ, Ε, Α φέρνουμε τις ΖΔ, ΕΓ, Αψ παράλληλες προς ΒΗ. Οι παράλληλες αυτές ορίζουν στην Αx ίσα τμήματα, οπότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και στην ΑΒ.
Άρα ΑΓ = ΓΔ = ΔΒ.

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να διαιρέσουμε το ΑΒ σε ν ίσα τμήματα .

Η έννοια του λόγου δύο ευθυγράμμων τμημάτων

Έστω ΑΒ, ΓΔ είναι δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ονομάζουμε λόγο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ προς το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ και συμβολίζουμε με $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ τον θετικό αριθμό λ, για τον οποίο ισχύει ΑΒ = λ · ΓΔ
Αν τα ευθύγραμμα τμήματα μετρηθούν με την ίδια μονάδα μέτρησης, τότε ο λόγος των ευθυγράμων τμημάτων είναι ίσος με τον λόγο των μηκών τους.

Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα

Αν έχουμε τα ευθύγραμμα τμήματα α, β,γ,δ τότε λέμε: Τα ευθύγραμμα τμήματα α, γ είναι ανάλογα προς τα β, δ όταν ισχύει:
$\frac{α}{β} = \frac{γ}{δ}$ (1). Η ισότητα (1) λέγεται αναλογία με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ, δ. Τα ευθύγραμμα τμήματα α, δ λέγονται άκροι όροι ενώ τα β, γ λέγονται μέσοι όροι. Αν έχουμε αναλογία με ευθύγραμμα τμήματα, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των αναλογιών αρκεί όμως ως α, β,γ,δ να θεωρήσουμε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων.

Αν σε μία αναλογία ισχύει: $\frac{α}{β} = \frac{γ}{α}$ τότε ο αριθμός α λέγεται μέσος ανάλογος των β και γ.

Οι σημαντικότερες ιδιότητες των αναλογιών είναι:

1 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $\alpha\delta = \beta\gamma$

Δηλαδή σε κάθε αναλογία το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το γινόμενο των μέσων όρων.

2 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$ ή $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

Δηλαδή σε κάθε αναλογία μπορούμε να εναλλάξουμε τους μέσους ή τους άκρους όρους και να προκύψει πάλι αναλογία.

3 Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ τότε $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$

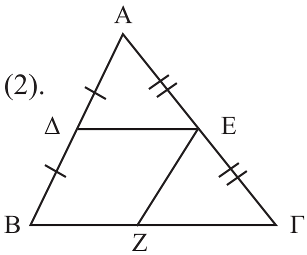
Δηλαδή λόγοι ίσοι μεταξύ τους είναι και ίσοι με το λόγο, που έχει αριθμητή το άθροισμα των αριθμητών και παρονομαστή το άθροισμα των παρονομαστών.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν Δ είναι το μέσον της ΑΒ και Ε είναι το μέσον της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι **α)** Το τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο στην ΒΓ

β) $\Delta E = \frac{B\Gamma}{2}$

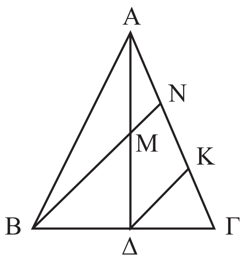
Λύση



α) Επειδή Δ μέσο της ΑΒ θα ισχύει ΑΔ = ΔΒ (1)
Ακόμη Ε μέσο της ΑΓ άρα θα ισχύει ΑΕ = ΕΓ (2).
Από (1) και (2) $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{AE}{E\Gamma}$, οπότε ΔΕ //ΒΓ

β) Από το Ε φέρνουμε ΕΖ // ΑΒ, τότε το Ζ θα είναι μέσον του ΒΓ, άρα $BZ = Z\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$. Το ΔΕΖΒ είναι παραλληλόγραμμο (διότι έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες) οπότε $\Delta E = BZ = \frac{B\Gamma}{2}$.

2 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος ΑΔ αυτού.



Από το μέσον Μ της ΑΔ φέρνουμε την ΒΜ η οποία τέμνει την ΑΓ στο Ν. Από το σημείο Δ φέρνουμε την παράλληλη στην ΒΝ που τέμνει την ΑΓ στο Κ. Να δείξετε ότι: **α)** ΑΝ = ΝΚ, **β)** ΝΚ = ΚΓ, **γ)** ΑΝ = ΝΚ = ΚΓ

Λύση

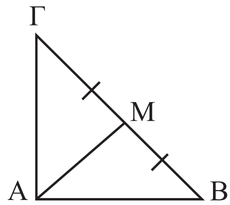
α) Στο τρίγωνο ΑΔΓ είναι ΜΝ //ΔΚ και επειδή το Μ είναι μέσο του ΑΔ, άρα το Ν είναι μέσο του ΑΚ, οπότε: ΑΝ = ΝΚ (1)

β) Στο τρίγωνο ΒΝΓ είναι ΔΚ // ΒΝ και επειδή το Δ είναι μέσο της ΒΓ, άρα το Κ είναι μέσο του ΝΓ, οπότε: ΝΚ = ΚΓ (2)

γ) Από (1) και (2) ΑΝ = ΝΚ = ΚΓ

3 Αποδείξτε ότι: σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

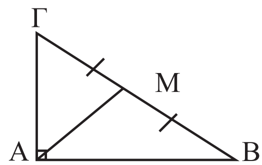
Λύση



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$).
Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ του ΑΒΓ και τη διάμεσο ΜΝ του ΑΜΓ. Στο τρίγωνο ΑΜΓ το Μ είναι μέσο του ΒΓ και το Ν είναι μέσο του ΑΓ, οπότε ΜΝ // ΑΒ.
Αλλά ΑΒ ⊥ ΑΓ, οπότε ΜΝ ⊥ ΑΓ.
Άρα ΜΝ μεσοκάθετη της ΑΓ οπότε για το σημείο Μ ισχύει: ΑΜ = ΜΓ. Επειδή το Μ είναι μέσο του ΒΓ θα ισχύει ΒΜ = ΜΓ. Οπότε ΑΜ = ΒΜ = ΜΓ, δηλ η διάμεσος στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

4 Αποδείξτε ότι: αν σε ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι 30^0 τότε η απέναντι κάθετος πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Λύση



Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$)

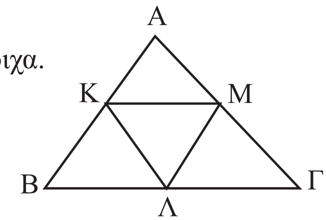
με $\hat{B} = 30^0$. Θα δείξουμε ότι: $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ Φέρνουμε

τη διάμεσο ΑΜ. Τότε ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ.

Επειδή $\hat{B} = 30^0$ θα είναι $\hat{Γ} = 60^0$. Οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο.

Άρα $ΑΓ = ΑΜ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

5 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Κ ,Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι και το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο και να βρείτε την περίμετρο του ΚΛΜ σε σχέση με το ΑΒΓ.



Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: **α)** Κ μέσον της ΑΒ, Μ μέσον της ΑΓ άρα

$KM=\frac{B\Gamma}{2}$ (1)

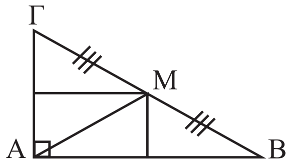
β) Λ μέσον της ΒΓ, Μ μέσον της ΑΓ άρα $\Lambda M=\frac{AB}{2}$ (2),

γ) Κ μέσον της ΑΒ, Λ μέσον της ΒΓ, άρα $K\Lambda=\frac{A\Gamma}{2}$ (3).
Επειδή ΑΒ = ΒΓ= ΑΓ από (1), (2), (3)
θα έχουμε: ΚΜ = ΛΜ = ΚΛ δηλαδή το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

$$\Pi_{K\Lambda M}=KM+\Lambda M+K\Lambda=\frac{B\Gamma}{2}+\frac{AB}{2}+\frac{A\Gamma}{2}=\frac{B\Gamma+AB+A\Gamma}{2}=\frac{1}{2}\Pi_{AB\Gamma}$$

6 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $(\hat{A}=90^0)$. Αν ΒΓ = 10 cm και Κ, Λ, Μ, είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να υπολογίσετε:
α) Τη διάμεσο ΑΚ και το τμήμα ΛΜ.
β) Να δείξετε ότι το ΑΜΚΛ είναι ορθογώνιο

Λύση



α) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η Α Κ είναι διάμεσος στην υποτείνουσα άρα

$AK=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{10}{2}=5$.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι: το Μ μέσον της ΑΓ

και το Λ μέσον της ΑΒ οπότε: $M\Lambda=\frac{B\Gamma}{2}=\frac{10}{2}=5$.

β) Το τετράπλευρο ΑΜΚΛ έχει: $\hat{A}=\hat{M}=\hat{\Lambda}=90^0$, οπότε $\hat{K}=90^0$, οπότε είναι ορθογώνιο.

Βασικά συμπεράσματα

1. Αν από το μέσον μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε παράλληλη προς τη μία πλευρά τότε περνάει από το μέσον της τρίτης πλευράς.

2. Αν ενώσουμε τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου, το ευθύγραμμο τμήμα είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και είναι ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς.

5. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

6. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι 30^0 τότε η απέναντι κάθετος πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Τα παραπάνω συμπεράσματα μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε στις ασκήσεις χωρίς να τα αποδεικνύουμε.

Ερωτήσεις κατανόησης

A. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

2. Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η μία οξεία γωνία είναι 60^0, τότε η προσκείμενη κάθετος στην πλευρά αυτή είναι το μισό της υποτείνουσας.

3. Κάθε ευθεία παράλληλη προς μία πλευρά τριγώνου χωρίζει τις άλλες δύο πλευρές σε μέρη ανάλογα.

4. Αν ενώσουμε τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου τότε σχηματίζεται παραλληλόγραμμο.

5. Αν έχουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm, τότε δεν μπορούμε να το χωρίσουμε σε 7 ίσα τμήματα.

6. Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{1}{3}$ τότε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μεγαλύτερο από το ΓΔ

7. Ο λόγος δύο πλευρών ενός ρόμβου είναι $\lambda = 1$

8. Αν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = \frac{3}{5}$, τότε ΑΒ = 3 και ΓΔ = 5

9. Αν ΑΒ ένα τμήμα και Μ μέσον του ΑΒ τότε: $\frac{AM}{MB}$ =1 cm

10. Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων είναι καθαρός αριθμός.

11. Ο λόγος δύο ευθυγράμμων τμημάτων δε μπορεί να είναι αρνητικός.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, και σημείο του Γ, τέτοιο ώστε:
$\frac{A\Gamma}{\Gamma B}=\frac{3}{5}$ Τότε ο λόγος $\frac{AB}{\Gamma B}$ είναι:
α. $\frac{8}{5}$, β. $\frac{5}{8}$, γ. $\frac{3}{5}$, δ. $\frac{5}{3}$

2. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$). Αν ΑΒ = 8 cm, ΑΓ = 6 cm τότε η διάμεσος ΑΜ είναι ίση με:
α. 4, **β.** 3, **γ.** 16, **δ.** 5.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$). Αν η διάμεσος ΑΜ είναι $\frac{13}{2}$ cm και η ΑΓ = 12 cm, τότε η πλευρά ΑΒ είναι:
α. 5 cm, **β.** 10 cm, **γ.** 8 cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^0$). Αν ΒΓ = 10cm και $\hat{B}=60^0$ τότε η πλευρά ΑΒ είναι:
α. 5cm, **β.** 20 cm, **γ.** 8 cm, **δ.** δεν προσδιορίζεται.

5. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά α. Τότε ο λόγος ενός ύψους προς την πλευρά του είναι:
α. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, β. $\sqrt{3}$, γ. $\frac{1}{2}$, δ. τίποτα από τα παραπάνω

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 10 cm, ΒΓ = 12 cm, ΑΓ = 16cm.
Αν Κ, Λ, Μ είναι τα μέσα των πλευρών του, τότε το τρίγωνο ΚΛΜ έχει περίμετρο.
α. 38 cm, **β.** 19 cm, **γ.** 27 cm, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5 cm

α) Να χωρίσετε με κανόνα και διαβήτη το τμήμα ΑΒ σε έξι ίσα τμήματα.

β) Πάνω σε μία ευθεία (ε) να σχεδιάσετε τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα : ΓΔ , ΔΖ , ΖΕ τέτοια ώστε:

$\Gamma\Delta=\frac{1}{6}AB$, $\Delta Z=\frac{7}{6}AB$, $AB=\frac{4}{3}ZE$

γ) Να υπολογίσετε τους λόγους:

i) $\frac{\Gamma\Delta}{AB}$, **ii)** $\frac{\Delta Z}{\Gamma\Delta}$, **iii)** $\frac{ZE}{\Gamma\Delta}$

2 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$). Αν ΒΓ = 12cm και $\hat{\Gamma} = 30^0$ και ΑΜ είναι η διάμεσος προς την υποτείνουσα να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AM}{A\Gamma}$, β) $\frac{AM}{B\Gamma}$, γ) $\frac{AB}{A\Gamma}$

3 Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με ($\hat{A} = 60^0$). Αν οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ τέμνονται στο Κ Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{\Delta K}{A\Delta}$, β) $\frac{KB}{AB}$, γ) $\frac{KA}{AB}$, δ) $\frac{KA}{K\Delta}$

4 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ). Από το μέσον Ε του ΑΒ να φέρετε παράλληλη στην ΑΔ, η οποία τέμνει τις ΑΓ, ΔΓ στα σημεία Κ, Λ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Κ, Λ είναι μέσα των ΑΓ, ΔΓ αντίστοιχα.

β) Τα τμήματα ΕΒ, ΚΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΑΕ, ΑΚ.

5 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ). Αν Ζ είναι μέσον του ΑΒ, Ε μέσον του ΑΓ, Δ μέσον του ΒΓ και ΑΚ είναι το ύψος του τριγώνου. Να αποδείξετε ότι:

α) ΚΖ = ΔΕ

β) $KE = \frac{A\Gamma}{2}$

γ) ΖΕ // ΒΓ

6 Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) είναι ΑΒ = 8cm και η διάμεσος ΑΜ = 5cm

Να υπολογίσετε τους λόγους:

α) $\frac{AB}{A\Gamma}$, β) $\frac{A\Gamma}{B\Gamma}$ γ) $\frac{AM}{B\Gamma}$

7 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με ΒΓ = 20 cm. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ. Αν Ε είναι το μέσον της ΑΜ και ΔΜ είναι κάθετη στην ΑΓ, να δείξετε ότι: ΔΕ = 5cm

8 Να αποδείξετε ότι: Τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου αποτελούν κορυφές παραλληλογράμμου.