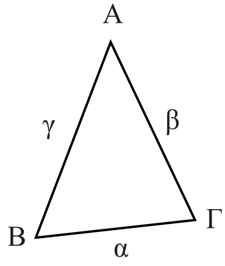
1.1 Ισότητα τριγώνων

Κύρια και δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

Τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του. Αν έχουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, τότε οι γωνίες του συμβολίζονται με τα γράμματα των κορυφών του, δηλ με $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.
Οι πλευρές του συμβολίζονται με τα μικρά γράμματα των απέναντι κορυφών του δηλ, ΒΓ = α, ΓΑ = β και ΑΒ = γ.

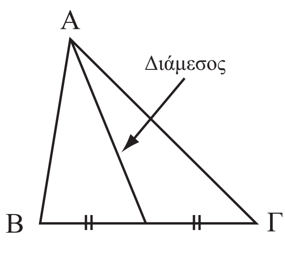


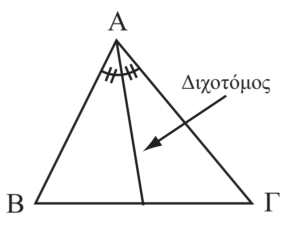
Για τις γωνίες κάθε τριγώνου ΑΒΓ ισχύει
$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180^0$

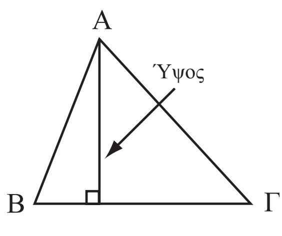
Η γωνία του τριγώνου που περιέχεται μεταξύ δύο πλευρών ονομάζεται περιεχόμενη γωνία των πλευρών αυτών, π.χ. περιεχόμενη γωνία των πλευρών ΒΓ, ΑΒ είναι η γωνία $\hat{B}$. Οι γωνίες του τριγώνου που έχουν κορυφές τα άκρα μιάς πλευράς λέγονται προσκείμενες γωνίες της πλευράς αυτής π.χ προσκείμενες γωνίες της πλευράς ΑΒ είναι οι γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

Τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι διάμεσοι τα ύψη και οι διχοτόμοι.

- **Διάμεσος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μία κορυφή του τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διαμέσους που τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο του τριγώνου το οποίο λέγεται κέντρο βάρους ή βαρύκεντρο.
- **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή και είναι κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς. Κάθε τρίγωνο έχει τρία ύψη που τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο λέγεται ορθόκεντρο.
- **Διχοτόμος** ενός τριγώνου ονομάζεται το ευθύγραμμο τμήμα που φέρουμε από μία κορυφή, χωρίζει τη γωνία σε δύο ίσες γωνίες και καταλήγει στην απέναντι πλευρά.



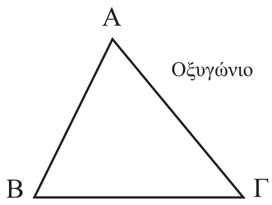


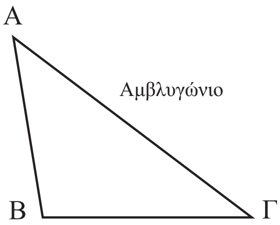


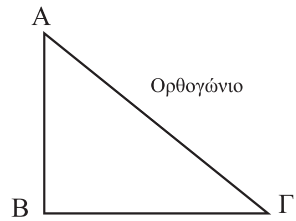
Κάθε τρίγωνο έχει τρεις διχοτόμους που τέμνονται σε ένα σημείο το οποίο λέγεται **έγκεντρο**.

Ένα τρίγωνο ανάλογα με το είδος των γωνιών του ονομάζεται:

1. **Οξυγώνιο,** όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες.
2. **Αμβλυγώνιο,** όταν έχει μία γωνία αμβλεία.
3. **Ορθογώνιο,** όταν έχει μία γωνία ορθή.

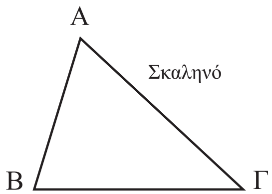


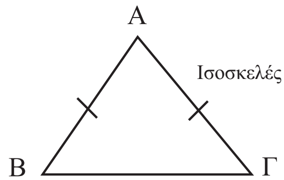


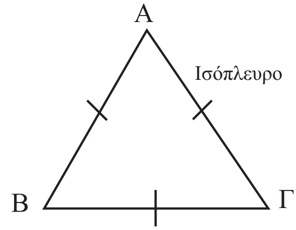


Ένα τρίγωνο ανάλογα με τις σχέσεις που συνδέονται οι πλευρές του ονομάζεται:

1. **Σκαληνό,** όταν έχει και τις τρεις πλευρές του άνισες.
2. **Ισοσκελές,** όταν έχει δύο πλευρές ίσες.
3. **Ισόπλευρο,** όταν έχει και τις τρεις πλευρές του ίσες.







Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την Ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**, ενώ οι άλλες δύο ονομάζονται **κάθετες πλευρές**.
Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ ονομάζεται **βάση** του και το σημείο Α **κορυφή** του.

Ίσα τρίγωνα

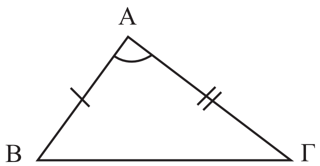
Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες.

Αντίστροφα:

Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε θα έχουν τις πλευρές τους και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.
Κριτήρια ισότητας τριγώνων λέμε τις προτάσεις με τις οποίες διαπιστώνουμε αν δύο τρίγωνα είναι ίσα .

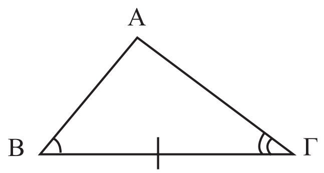
1ο κριτήριο ισότητας (Π-Γ-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.



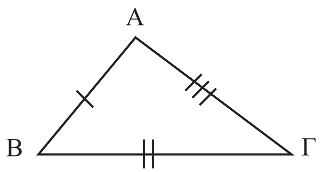
2ο κριτήριο ισότητας (Γ-Π-Γ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



3ο κριτήριο ισότητας (Π-Π-Π)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Παρατηρήσεις:

1. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
2. Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

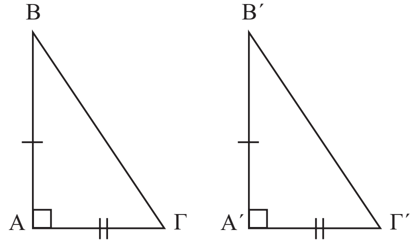
Τα προηγούμενα κριτήρια μπορούμε να τα εφαρμόσουμε και στα ορθογώνια τρίγωνα έτσι έχουμε:

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων

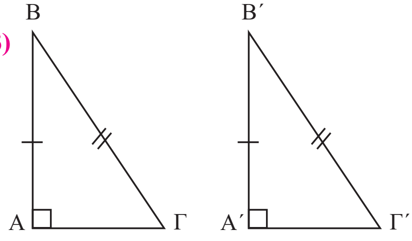
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- Δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία

(α)

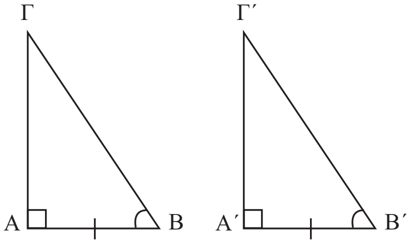


(β)

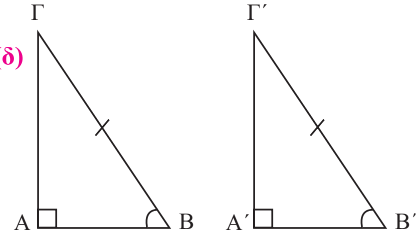


- Μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

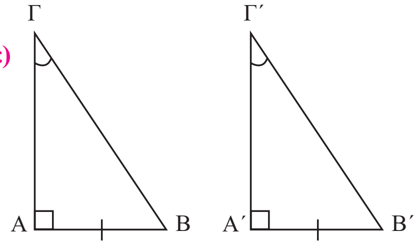
(γ)



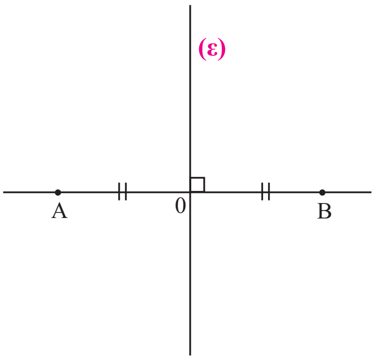
(δ)



(ε)



Μεσοκάθετο ενός ευθυγράμμου τμήματος λέμε την ευθεία η οποία είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα και περνάει από το μέσον του.



Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος.

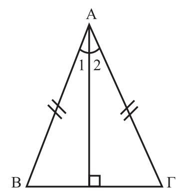
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του .
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος

Χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιάς γωνίας.

- Κάθε σημείο της διχοτόμου μιάς γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.
- Κάθε σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές μιας γωνίας είναι σημείο της διχοτόμου της.

Λυμένες ασκήσεις

1 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
Να αποδείξετε ότι:
α) Οι παρα τη βάση γωνίες του είναι ίσες.
β) Η διχοτόμος της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.



Λύση

α) Αν φέρουμε την διχοτόμο ΑΔ, τότε: Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ τα οποία έχουν:

i) ΑΒ = ΑΓ υπόθεση **ii)** $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΑΔ διχοτόμος) 3) ΑΔ κοινή. Άρα είναι ίσα σύμφωνα με το κριτήριο (Π-Γ-Π), οπότε θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Έτσι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

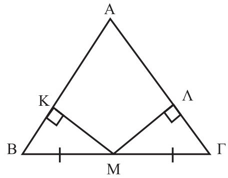
β) Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα. Οπότε ΓΔ = ΒΔ άρα η ΑΔ είναι διάμεσος. Ακόμη $A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma$ και $A\hat{\Delta}B$, $A\hat{\Delta}\Gamma$ είναι παραπληρωματικές άρα θα ισχύει:

$A\hat{\Delta}B = A\hat{\Delta}\Gamma = 90^0$. Άρα η διχοτόμος ΑΔ θα είναι διάμεσος και ύψος .

2 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Από το μέσον Μ της ΒΓ φέρνουμε τις ΜΚ κάθετη στην ΑΒ και την ΜΛ κάθετη στην ΑΓ.
Να δείξετε ότι:
α) Τα ΓΜΛ, ΒΜΚ είναι ίσα. **β)** Το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές.
γ) $B\hat{M}K = \Gamma\hat{M}\Lambda$

Λύση

α) Τα τρίγωνα ΓΜΛ, ΒΜΚ έχουν:



i) ΒΜ = ΜΓ (διότι Μ μέσον ΒΓ)

ii) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

iii) Είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια έχουν ίσες υποτείνουσες και μία οξεία γωνία ίση.

β) Από το α) ερώτημα τα τρίγωνα ΓΜΛ, ΒΜΚ είναι ίσα,οπότε θα έχουν ίσα όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους.

Έτσι: ΚΜ = ΜΛ οπότε το τρίγωνο ΜΚΛ είναι ισοσκελές.

γ) Τα τρίγωνα ΒΜΚ, ΜΛΓ έχουν: **i)** ΒΜ = ΜΓ , **ii)** ΜΚ = ΜΛ **iii)** είναι ορθογώνια. Άρα είναι ίσα διότι έχουν ίσες υποτείνουσες, μία κάθετη πλευρά ίση, οπότε τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα.

Έτσι $B\hat{M}K = \Gamma\hat{M}\Lambda$.

Ερωτήσεις κατανόησης

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ένα τρίγωνο λέγεται αμβλυγώνιο όταν όλες οι γωνίες του είναι αμβλείες.
2. Ένα ισοσκελές τρίγωνο δεν μπορεί να έχει αμβλεία γωνία
3. Ένα ισόπλευρο τρίγωνο είναι ισοσκελές.
4. Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει μία γωνία ορθή και μία αμβλεία
5. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο οι διχοτόμοι να είναι και διάμεσοι.
6. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και μία γωνία ίση τότε είναι ίσα.
7. Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία τότε είναι ίσα.
8. Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους τότε είναι ίσα.
9. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν τις γωνίες ίσες τότε είναι ίσα.
10. Δύο ορθογώνια τρίγωνα με τις κάθετες πλευρές ίσες, είναι ίσα.
11. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η μεγαλύτερη γωνία είναι η ορθή.
12. Στο ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι γωνίες είναι ίσες.
13. Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους τότε είναι ίσα.
14. Αν σε ένα τρίγωνο οι δύο πλευρές του είναι άνισες τότε είναι σκαληνό.
15. Οι γωνίες της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι πάντα οξείες.
16. Ένα τρίγωνο λέγεται αμβλυγώνιο αν η μία γωνία του είναι αμβλεία.
17. Η διχοτόμος τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισογώνια τρίγωνα.
18. Κάθε σημείο που απέχει από τις πλευρές μιας γωνίας ανήκει σε μεσοκάθετο.

Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

1. Σε ένα τρίγωνο η μία γωνία είναι ορθή. Οι άλλες δύο είναι πάντοτε:
α. οξείες, **β.** παραπληρωματικές, **γ.** ίσες, **δ.** άνισες

2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι:
α. ορθογώνιο και ισοσκελές, **β.** ισοσκελές και αμβλυγώνιο
γ. ισόπλευρο και ορθογώνιο, **δ.** σκαληνό και ορθογώνιο.

3. Αν το ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι εκτός αυτού τότε:
α. Το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, **β.** Το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.
γ. Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο, **δ.** Το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο με $A > 90^0$.

4. Αν οι γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι: $A = 3x$, $B = 1200 - 2x$, $\Gamma = 200 + x$ τότε το τρίγωνο είναι:
α. Ορθογώνιο σκαληνό, **β.** Αμβλυγώνιο, **γ.** Οξυγώνιο **δ.** Ισόπλευρο

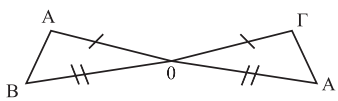
5. Τα ύψη ενός τριγώνου τέμνονται εκτός του τριγώνου, τότε το τρίγωνο είναι:
α. ορθογώνιο, **β.** οξυγώνιο, **γ.** αμβλυγώνιο, **δ.** ισόπλευρο.

6. Σε ένα τρίγωνο το ένα μόνο ύψος ταυτίζεται με την διχοτόμο, τότε το τρίγωνο είναι:
α. ορθογώνιο, **β.** ισοσκελές, **γ.** ισόπλευρο. **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

7. Αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε τα ύψη τέμνονται:
α. εκτός του τριγώνου, **β.** εντός του τριγώνου, **γ.** είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, **δ.** τίποτα από τα παραπάνω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Στο διπλανό σχήμα είναι ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ.
Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΓΔ είναι ίσα.
β) Τα ΟΑΓ, ΟΒΔ είναι ισοσκελή.



2 Δίνεται γωνία $x\hat{O}\psi$ και Οδ η διχοτόμος της. Αν από τυχαίο σημείο Α της Οδ φέρουμε τις $AK \perp Ox$ και $A\Lambda \perp O\psi$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΟΑΚ, ΟΑΛ είναι ίσα και να γράψετε τις ισότητες για τα υπόλοιπα στοιχεία των τριγώνων.

3 Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: $\hat{A}=\hat{\Delta}$, ΑΒ = ΔΕ και ίσες τις διχοτόμους ΑΚ, ΔΛ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΕΛ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσα.
γ) Τα τρίγωνα ΑΚΓ, ΔΛΖ είναι ίσα.

4 Αν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ έχουν: $\hat{B}=\hat{E}$, $\hat{\Gamma}=\hat{Z}$ και ίσα τα ύψη ΑΚ, ΔΛ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΕΔΛ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΚΓ, ΔΛΖ είναι ίσα.
γ) Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ είναι ίσα.

5 Δίνονται τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ τα οποία είναι ίσα με: ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ Φέρνουμε τα ύψη ΑΔ , Α′Δ′. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΔ, Α′Β′Δ′ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ, Α′Δ′Γ′ είναι ίσα.

6 Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Β ισαπέχουν από οποιαδήποτε ευθεία (ε) η οποία περνάει από το μέσον Μ του τμήματος ΑΒ.

7 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $(\hat{A}=90^0)$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ και παίρνουμε ΑΜ = ΜΕ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΜΒ, ΜΓΕ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΒΜΕ, ΑΜΓ είναι ίσα.

8 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε την βάση ΒΓ προς τα σημεία Β, Γ. Στην προέκταση προς το Β παίρνουμε το σημείο Ε και στην προέκταση προς το Γ το σημείο Ζ, τέτοια ώστε ΒΕ = ΓΖ.
Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΑΓΖ είναι ίσα.
β) Το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.
γ) Οι αποστάσεις των κορυφών Β, Γ από τις ΑΕ και ΑΖ είναι ίσες.

9 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και τις αποστάσεις ΒΔ και ΓΕ των κορυφών Β, Γ από την ΑΜ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΜ είναι ίσα
β) ΒΔ = ΓΕ

10 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΑΓ = ΓΕ. Φέρνουμε το ύψος ΑΚ. Από τα σημεία Δ, Ε φέρνουμε τα τμήματα ΔΛ, ΕΝ, πού είναι κάθετα στην ΒΓ. Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΔΛΒ, ΑΒΚ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΓΕΝ, ΑΚΓ είναι ίσα.
γ) Τα σημεία Δ, Ε ισαπέχουν από την ΒΓ.

11 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και πάνω σ' αυτή παίρνουμε τυχαίο σημείο Κ. Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΒΚΜ, ΜΚΓ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΚ, ΑΚΓ είναι ίσα.
γ) Το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές.

12 Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε την διαγώνιο ΒΔ. Από τις κορυφές Α, Ε φέρνουμε τις ΑΕ, ΓΖ κάθετες στην ΒΔ. Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΓΖ είναι ίσα.
β) Τα τρίγωνα ΑΕΒ, ΔΓΖ είναι ίσα.
γ) Οι κορυφές Α, Γ ισαπέχουν από την ΒΔ.

13 Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) και ΑΔ η διχοτόμος του. Από το σημείο Β φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΔΖ είναι ίσα.
γ) Το ΒΔΖ είναι ισοσκελές.

14 Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο είναι ίσες.

15 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές ΑΒ, ΑΓ και παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Αν Κ είναι το μέσον της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΚΔ και ΑΚΕ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες ΑΔΚ και ΑΕΚ είναι ίσες.