1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

Παραγοντοποίηση ή ανάλυση σε γινόμενο παραγόντων λέγεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μία παράσταση, που είναι άθροισμα, σε γινόμενο.

Όταν μία παράσταση δεν επιδέχεται περαιτέρω παραγοντοποίηση, τότε λέμε ότι η παράσταση έχει αναλυθεί σε **γινόμενο πρώτων παραγόντων**. Έτσι όταν λέμε ότι παραγοντοποιούμε μία παράσταση, θα εννοούμε ότι την αναλύουμε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων.

Οι πιο χαρακτηριστικές περιπτώσεις παραγοντοποίησης μιάς αλγεβρικής παράστασης είναι:

α) Κοινός παράγοντας

Αν όλοι οι όροι μιας παράστασης έχουν κοινό παράγοντα, τότε η παράσταση μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων σύμφωνα με την επιμεριστική ιδιότητα.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) $8x^2\psi - 20x\psi^2 + 12x^2\psi^2$ **ii)** $\alpha(\kappa - \lambda) + 3\beta(\lambda - \kappa)$ **iii)** $4(3x - 1) + x(2 - 6x)$

Λύση

i) $8x^2\psi - 20x\psi^2 + 12x^2\psi^2 = 4x\psi(8x - 5\psi + 3x\psi)$
ii) $\alpha(\kappa - \lambda) + 3\beta(\lambda - \kappa) = \alpha(\kappa - \lambda)-3(\kappa - \lambda) = (\kappa - \lambda)(\alpha - 3)$
iii) $4(3x - 1) + x(2 - 6x) = 4(3x - 1) - 2x(3x - 1) = (3x - 1)(4 - 2x) = 2(3x - 1)(2 - x)$

β) Κοινός παράγοντας κατά ομάδες (Ομαδοποίηση)

Όταν οι όροι του πολυωνύμου δεν έχουν κοινό παράγοντα, τους χωρίζουμε σε ομάδες με το ίδιο πλήθος όρων κατά τέτοιο τρόπο ώστε:

- Κάθε ομάδα να έχει κοινό παράγοντα.
- Όταν βγάλουμε κοινό παράγοντα από κάθε ομάδα, να παρουσιάζεται το ίδιο πολυώνυμο μέσα στην κάθε παρένθεση για όλες τις ομάδες.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις
i) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6$ **ii)** $x\psi - 5x - 5\psi + 25$ **iii)** $2x^2 + 6x\psi + 4\psi^2$

Λύση

i) $4x^3 - 8x^2 + 3x - 6 = 4x^2(x - 2) + 3(x - 2) = (x - 2)(4x^2 + 3)$

ii) $x\psi - 5x - 5\psi + 25 = x(\psi - 5) -5(\psi - 5) = (\psi - 5)(x - 5)$

iii) $2x^2 + 6x\psi + 4\psi^2 = 2x^2 + 2x\psi + 4x\psi + 4\psi^2 = 2x(x + \psi) + 4\psi(x + \psi) =$
$= (x + \psi)(2x + 4\psi) = 2(x + \psi)(x + 2\psi)$

γ) Διαφορά τετραγώνων

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στην ταυτότητα

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Με την ταυτότητα αυτή, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση που είναι διαφορά τετραγώνων.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $9x^2 - 16$ **ii)** $(2x - 1)^2 - 49$ **iii)** $x^2 - 5$

Λύση

i) $9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x - 4)(3x + 4)$

ii) $(2x -1)^2 - 49 = [(2x - 1)-7][(2x - 1) + 7] = (2x - 1 - 7)(2x - 1 + 7) =$
$(2x - 8)(2x + 6) = 2(x - 4)2(x + 3) = 4(x - 4)(x + 3)$

iii) $x^2 -5 = x^2-(\sqrt{5})^2 = (x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

δ) Διαφορά ή άθροισμα κύβων

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2),\ \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση που είναι διαφορά ή άθροισμα κύβων.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $x^3 - 8$ **ii)** $x^3 + 27$ **iii)** $27x^3 - 8\alpha^3$

Λύση

i) $x^3 - 8 = x^3 - 2^3 = (x-2)(x^2 + x + 2)$

ii) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x + 3) (x^2 - 3x + 9)$

iii) $27x^3 - 8\alpha^3 = (3x)^3 - (2\alpha)^3 = (3x - 2\alpha)[(3x)^2 + 3x2\alpha + (2\alpha)^2]=$
$(3x - 2\alpha)(9x^2 + 6\alpha x + 4\alpha^2)$

ε) Ανάπτυγμα τετραγώνου

Αυτή η μέθοδος στηρίζεται στις ταυτότητες

$\boldsymbol{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2}$, $\boldsymbol{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2}$

Σύμφωνα με τις ταυτότητες αυτές, μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε μία παράσταση που είναι ανάπτυγμα τετραγώνου **(τέλειο τετράγωνο)**.

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

i) $\alpha^2 + 6\alpha + 9$ **ii)** $16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2$ **iii)** $-\alpha^2 + 2\alpha - 1$

Λύση

i) $\alpha^2 + 6\alpha + 9 = \alpha^2 + 2 \cdot 3\alpha + 3^2 = (\alpha + 3)^2$

ii) $16\alpha^2 - 24\alpha\beta + 9\beta^2 = (4\alpha)^2 - 2\cdot 4\alpha \cdot 3\beta + (3\beta)^2 = (4\alpha - 3\beta)^2$

iii) $-\alpha^2 + 2\alpha - 1 = -(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = -(\alpha-1)^2$

στ) Παραγοντοποίηση τριωνύμου της μορφής $\boldsymbol{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta}$.

Ένα τριώνυμο της μορφής $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ παραγοντοποιείται σύμφωνα με τον τύπο

$$\boldsymbol{x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)}$$

Παραδείγματα

Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα

i) $x^2 - 7x + 6$ **ii)** $x^2 + 3x + 2$ **iii)** $-2x^2 + 8x - 6$

Λύση

i) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 - 7x + 6$, αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 6 και άθροισμα -7. Οι αριθμοί αυτοί πρέπει να είναι αρνητικοί, αφού έχουν γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό. Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι: το -1 και το -6.

Άρα έχουμε $x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$

ii) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $x^2 + 3x + 2$, πρέπει να βρούμε δύο αριθμούς με άθροισμα 3 και γινόμενο 2. Οι αριθμοί θα είναι ομόσημοι (έχουν γινόμενο θετικό). Με δοκιμές βρίσκουμε ότι οι αριθμοί είναι: το 1 και το 2 .

Άρα έχουμε $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

iii) Για να παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $-2x^2 + 8x - 6$, βγάζουμε κοινό παράγοντα το -2, ώστε ο συντελεστής του x^2 να γίνει 1, οπότε έχουμε $-2x^2 + 8x - 6 = -2(x^2 - 4x + 3)$

Στη συνέχεια θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο : $x^2 - 4x + 3$. Αναζητούμε δύο αριθμούς με γινόμενο 3 και άθροισμα -4. Οι αριθμοί αυτοί είναι : το -1 και το -3. Οπότε $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Αρα έχουμε $-2x^2 + 8x - 6 = -2(x^2 - 4x + 3) = -2(x - 1)(x - 3)$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **Να παραγοντοποήσετε τις παραστάσεις:**

α) $4α + 8β$ **β)** $6α^2 + 24α^3 + 2α$ **γ)** $4α^2 - 2α + 2$ **δ)** $α^4 + α^3$ **ε)** $\frac{1}{2}α^2 - \frac{3}{2}α$

στ) $α^2(x - 3ψ) - (x - 3ψ)$, **ζ)** $αx + αψ - λψ - λx$ **η)** $9x^4 - 15x^2 + 25$

Λύση

α) $4α + 8β = 4(α + 2β)$
β) $6α^2 + 24α^3 + 2α = 2α(3α + 12α^2 + 1)$
γ) $4α^2 - 2α + 2 = 2(2α^2 - α + 1)$
δ) $α^4 + α^3 = α(α + 1)$
ε) $\frac{1}{2}α^2 - \frac{3}{2}α = \frac{1}{2}α(α - \frac{3}{2})$
στ) $α^2(x - 3ψ) – (x - 3ψ) = (x - 3ψ)(α^2 - 1) = (x - 3ψ)(α - 1)(α + 1)$
ζ) $αx + αψ - λψ - λx = α(x + ψ) – λ(x + ψ) = (x + ψ)(α - λ)$
η) $9x^4 - 15x^2 + 25 = (3x^2 - 5)^2$

2 **α)** Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A = 3x^3 - 3x$
β) Να λυθεί η εξίσωση : $3x^3 = 3x$

Λύση

α) $A = 3x^3 - 3x = 3x(x^2 - 1) = 3x(x - 1)(x + 1)$
β) $3x^3 = 3x$ ή $3x^3 - 3x = 0$ ή $3x(x - 1)(x + 1) = 0$ ή $3x = 0$ ή $x - 1 = 0$ ή $x + 1 = 0$ ή $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ισχύει $x^2 - 2 = (x - 2)(x + 2)$.

2. Ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$.

3. Ισχύει $\alpha^2 - \beta^2 = -(\beta - \alpha)(\alpha + \beta)$.

4. Ισχύει $\psi(\alpha + \beta) - \alpha - \beta = (\alpha + \beta)(\psi + 1)$.

5. Ισχύει $\alpha(\kappa - \lambda) + \beta(\lambda - \kappa) = (\alpha - \beta)(\kappa - \lambda)$.

6. Ισχύει $1 - x^2 = (x - 1)(x + 1)$.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Η παράσταση $x^3 - 5x^2 + 6x$ είναι ίση με:
α. $x(x - 2)(x - 3)$, **β.** $x(x + 2)(x + 3)$, **γ.** $x(x - 2)(x + 3)$, $x(x + 2)(x - 3)$

2. Η τιμή της παράστασης $K = \dfrac{15{,}23^2 - 5{,}23^2}{20{,}46}$ είναι:
α. 10, **β.** 100, **γ.** 2, **δ.** 5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $3x^2 + 6x$ **β)** $4x^3 - 4x^2$ **γ)** $3x^2 - 3$ **δ)** $5x^3 - 10x^2 - 5x$ **ε)** $4x^2\psi - 12x\psi$
στ) $3(x - \psi) - \alpha(\psi - x) - x + \psi$ **ζ)** $\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$

2 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $(\alpha + 1)^2 - \alpha - 1$ **β)** $x^3 + x^2 + x + 1$ **γ)** $(x - 4)(\alpha + \beta) - x + 4$ **δ)** $x^2 - 2x\psi + \psi^2$
ε) $25x^2 - 10x\psi + \psi^2$ **στ)** $(x + \psi)^2 - 6(x + \psi) + 9$

3 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $4 - \alpha^2$ **β)** $16 - \alpha^2$ **γ)** $x^2 - 5$ **δ)** $x^3 - x$ **ε)** $18x^2 - 8\psi^2$
στ) $\alpha^4 - 1$ **ζ)** $9(x + \psi)^2 - 16(x - \psi)^2$

4 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $x^2 - 3$ **β)** $x^2 - 5$ **γ)** $x^4 - x$ **δ)** $x^3 - 5x^2 + 7x - 35$ **ε)** $x^3 - 4x$

5 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $(x^2 - 4)^2 - (x + 3)(x + 2)^2$ **β)** $(2x - 6)(x^2 - 9) - (4x - 12)(x - 3)^2$
γ) $4x^2 - 4x + 1 - 9ψ^2$ **δ)** $α^2 + 2αβ - x^2 + 2xψ + β^2 - ψ^2$
ε) $α(β - 2) -4(β - 2) - (2 - β)^2$ **στ)** $x^3 + 8 - x(x + 2)$
ζ) $x^3 - 27 - (x - 3)$

6 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $(2α + β)(x - 1) – (1 - x)(α + β)$, **β)** $(α + β)(x + ψ) - νx - νψ$,
γ) $(α^2 -β^2)(x+ψ)-(x^2-ψ^2)(α-β)$

7 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) $x^2 - 3x + 2$, **β)** $x^2 - 7x + 6$, **γ)** $3x^2 - 2x - 1$, **δ)** $-x^2 + 7x + 6$, **ε)** $x^2- 4x + 4$

8 Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:
α) $x^2+(3+\sqrt{3})\,x+3\sqrt{3}$ **β)** $x^2+(3κ+λ)x+3κλ$ **γ)** $x^2+(4-\sqrt{5})x-4\sqrt{5}$

9 Να παραγοντοποιήσετε:
α) $x^2 - 2x - 3 + α(x + 1)$, **β)** $x^2 + αx + 5x -α -6$, **γ)** $x^2 + xψ - 7x - 4ψ + 12$

10 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $x^3 - 4x^2 + 3x$, **β)** $x^3 - 6x^2 + 8x$, **γ)** $2x^3 - 10x^2 + 12x$, **δ)** $\frac{x \cdot ψ}{10}+\frac{x^2}{25}+\frac{ψ^2}{16}$

11 Να γράψετε με τη μορφή γινομένου:
α) $8x^3 -27ψ^3$, **β)** $x^3 - 8ψ^3$, **γ)** $x^3 + 1$, **δ)** $54x^3 + 16ψ^3$
ε) $α^6 - 1$, **στ)** $16x^4 + 2x$

12 **α)** Να κάνετε γινόμενο την παράσταση: $\mathbf{A} = x^3 - 5x^2 + 6x$
β) Να λύσετε $A = 0$

13 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 - 100 = 0$, **β)** $16x^3 - x = 0$, **γ)** $x\cdot(x + 2)^2 = 9x$, **δ)** $(x - 3)^3 = (x - 3)$,
ε) $x^2 (x - 1)-x + 1 = 0$, **στ)** $x^2(x - 2) - 4x + 8 = 0$

14 **α)** Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $\mathbf{A} = α^2 - 4 + 4αβ + 4β^2$
β) Να υπολογίσετε την παράσταση $\left(\frac{α^2 - 4 + 4αβ + 4β^2}{α + 2β - 2} - α - 2β - 3\right)^{2007}$

15 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
$\mathbf{A} = α^2 - 4αβ + 4β^2 - 16$, $\mathrm{B} = 4α^2 - 4 - 4αβ + β^2$ $\mathbf{Γ} = x^2 - 4xψ - 5ψ^2$
$\mathbf{Δ} = 3α^2 - 4α + 1 - 2αβ - β^2$

16 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
Α $= x^4 + 4ψ^4$, **Β** $= x^4 + 4$, **Γ** $= x^4 + 9 - 7x^2$, **Δ** $= x4 + ψ4 - 3x^2ψ^2$
Ε $= x^4 + ψ^4 + x^2ψ^2 Z = x^2 + 4xψ - 5ψ^2$

17 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
Α $= x^3 - 7x + 6$, **Β** $= 2x^3 - 5x + 3$, **Γ** $= x^3 - 4x + 3$, **Δ** $= x^3 + 2x^2 - 1$

18 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $x^{ν+3} - x^ν$ **β)** $x^{μ+2} - x^μ$ **γ)** $x^{ν+1} - x^{μ+2}$ **δ)** $x^{ν+3} - x^{μ+2} - x^{κ+2}$

19 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:
α) $(x + 1)^2 - 4(x + 1) + 4$ **β)** $α^2 + β - β^2 - α + (α - β)^2$ **γ)** $(x-1)^2 - 6(x-1) + 9$

20 Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις χωρίς να χρησιμοποιήσετε υπολογιστή τσέπης.
α) $2007 \cdot 1321 - 2007 \cdot 321$ **β)** $995^2 - 25$ **γ)** $998 \cdot 1002 + 1$ **δ)** $401 \cdot 399$
ε) $2007^2 - 2006 \cdot 2008$

1.7 Διαίρεση πολυωνύμων

Ξέρουμε ότι, αν έχουμε δύο φυσικούς αριθμούς **Δ (διαιρετέος)** και **δ (διαιρέτης)** με $δ \neq 0$ και κάνουμε τη διαίρεση Δ : δ, τότε βρίσκουμε δύο άλλους μοναδικούς φυσικούς αριθμούς **π (πηλίκο)** και **υ (υπόλοιπο)**, για τους οποίους ισχύει:

$$Δ = δ \cdot π + υ \quad \text{με} \quad 0 \leq υ < δ$$

Αν $υ = 0$, τότε $Δ = δ \cdot π$ και τότε λέμε ότι η διαίρεση είναι τέλεια. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο δ διαιρεί τό Δ ή ότι ο δ είναι παράγοντας του Δ.

Ομοίως, αν έχουμε δύο πολυώνυμα Δ(x) (διαιρετέος) και δ(x) (διαιρέτης) με $δ(x) \neq 0$ και κάνουμε την διαίρεση Δ(x):δ(x), τότε βρίσκουμε ένα μοναδικό ζεύγος πολυωνύμων π(x) (πηλίκο) και υ(x) (υπόλοιπο), για τα οποία ισχύει:

Δ(x) = δ(x) π (x) + υ (x) *(Ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης)*,

όπου το υ(x) ή είναι ίσο με μηδέν ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).