1.5 Αξιοσημείωτες ταυτότητες

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Οι αξιοσημείωτες ταυτότητες είναι :

α) Τετράγωνο αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη:

$(\alpha + \beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

Το δεύτερο μέρος της ισότητας $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ λέγεται ανάπτυγμα του $(\alpha+ \beta)^2$.

β) Τετράγωνο διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

Απόδειξη:

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Κύβος αθροίσματος - διαφοράς

i) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

ii) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

Απόδειξη:

i) $(\alpha + \beta)^3 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha+\beta)^2 = (\alpha + \beta) \cdot (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) =$
$\alpha^3 + 2\alpha^2 \beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^3.$

ii) $(\alpha - \beta)^3 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha - \beta)^2 = (\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2) =$
$\alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

δ) Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

Απόδειξη:

$(\alpha + \beta) \cdot(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha - \beta^2 = \alpha^2 - \beta^2$

ε) Διαφορά κύβων - Άθροισμα κύβων

i) $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta) \cdot(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$

ii) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta) (\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$

Απόδειξη:

i) $(\alpha-\beta)\cdot(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3 = \alpha^3-\beta^3$

ii) $(\alpha+\beta)\cdot(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3 = \alpha^3+\beta^3$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Δεν είναι σωστό να πούμε ότι ότι μία ταυτότητα έχει άπειρες λύσεις.

2. Ισχύει η ισότητα $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2$, όταν ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι 0.

3. Αν έχουμε $\alpha^2+\beta^2=0$ τότε $\alpha=0$ και $\beta=0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να βρείτε τα αναπτύγματα

α) $(x+3)^2$ **β)** $(3\psi-2)^2$ **γ)** $(\psi^2+3\psi)^2$ **δ)** $(4x-\sqrt{3})^2$

Λύση

Σύμφωνα με τις ταυτότητες $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ και $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$

α) $(x+3)^2 = x^2+2\cdot3x+3^2 = x^2+6x+9$.

β) $(3\psi-2)^2 = (3\psi)^2-2\cdot3\psi2+2^2 = 9\psi^2-12\psi+4$

γ) $(\psi^2+3\psi)^2 = (\psi^2)^2+2\psi3\psi+(3\psi)^2 = \psi^4+6\psi^2+9\psi^2 = \psi^4+15\psi^2$

δ) $(4x-\sqrt{3})^2 = (4x)^2-2\cdot 4x\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2 = 16x^2-8x+3$

2 Αν η παρακάτω ισότητα είναι ταυτότητα

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha+\beta) = \alpha^8-\beta^8$.

Να εξετάσετε αν ισχύει για $\beta=\dfrac{1}{2007}$ και $\alpha=2007$

Λύση

Επειδή η ισότητα: $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^4+\beta^4)(\alpha+\beta) = \alpha^8-\beta^8$ είναι ταυτότητα θα ισχύει για κάθε τιμή των α, β άρα θα ισχύει για $\alpha=2007$ και $\beta=\dfrac{1}{2007}$

3 **Α. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:**

α) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

β) $(\alpha - \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

Β. Να βρεθούν τα αναπτύγματα:

$(2\alpha + \beta + 3\gamma)^2$, $(3\alpha - 3\beta - 4\gamma)^2$

Λύση

Α. α) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = (\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta + \gamma) =$

$\alpha^2 + \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma + \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma$

β) $(\alpha-\beta-\gamma)^2 = (\alpha-\beta-\gamma)(\alpha-\beta-\gamma) = \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\alpha + \beta^2 + \beta\gamma - \alpha\gamma + \beta\gamma + \gamma^2 =$

$= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma + 2\beta\gamma.$

Β. Από τις προηγούμενες ταυτότητες έχουμε:

$(2\alpha + \beta + 3\gamma)^2 = (2\alpha)^2 + \beta^2 + (3\gamma)^2 + 2\cdot 2\alpha\beta + 2\cdot 2\alpha \cdot 3\gamma + 2\beta \cdot 3\gamma =$

$4\alpha^2 + \beta^2 + 9\gamma^2 + 4\alpha\beta + 12\alpha\gamma + 6\beta\gamma.$

$(3\alpha - 3\beta - 4\gamma)^2 = (3\alpha)^2 + (-3\beta)^2 + (-4\gamma)^2 + 2\cdot 3\alpha\cdot(-3\beta) + 2\cdot 3\alpha\cdot(-4\gamma) + 2\cdot(-3\beta)\cdot(-4\gamma)$

$= 9\alpha^2 + 9\beta^2 + 16\gamma^2 - 18\alpha\beta - 24\alpha\gamma + 24\beta\gamma$

4 **Α. Να αποδειχθούν οι ταυτότητες**

α) $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$ και $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

β) Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha\beta = 5$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων

Α$= \alpha^2 + \beta^2$, **Β** $= \alpha^3 + \beta^3$, **Γ** $= \alpha^4 + \beta^4$

Λύση

α) Ξεκινάμε από το β μέλος:

$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$

$(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$

β) Από α) έχουμε :

Α$= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = 6^2 - 2 \cdot 5 = 36 - 10 = 26.$

Β$= \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 6^3 - 3 \cdot 5 \cdot 6 = 216 - 90 = 226.$

Γ$= \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2)^2 + (\beta^2)^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = 26^2 - 2(\alpha\beta)^2 =$

$676 - 2\cdot 5^2 = 676 - 50 = 626.$

5 **Να γίνουν οι πράξεις**

α) $(3α - β)^2 - 3(4α + 5)(4α - 5)$ **β)** $(3x - ψ)(3x + ψ) - (x - ψ)(x^2 + xψ + ψ^2)$

Λύση

α) $(3α - β)^2 - 3(4α + 5)(4α - 5) = (3α)^2 - 2 \cdot 3α\, β + β^2 - [(4α)^2 - 52] =$
$9α^2 - 6αβ + β^2 - 16α^2 + 25 = 7α^2 - 6αβ + β^2 + 25$

β) $(3x - ψ)(3x + ψ) - (x - ψ)(x^2 + xψ + ψ^2) = (3x)^2 - ψ^2 – (x^3 - ψ^3) =$
$9x^2 - ψ^2 - x^3 + ψ^3$

6 **Να αποδείξετε ότι:**

α) $(α + β)^2 - (α - β)^2 = 4αβ$

β) $(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4$

γ) $(3κ + 2)^2 - (2κ + 3)^2 = 5 \cdot (κ - 1)(κ + 1)$.

Λύση

α) $(α + β)^2 - (α - β)^2 = α^2 + 2αβ + β^2 – (α^2 - 2αβ + β^2) =$
$α^2 + 2αβ + β^2 + 2αβ - β^2 = 4αβ$

β) Από α) Αν βάλουμε όπου $α = 2007$ και $β = \frac{1}{2007}$ τότε

$$(2007 + \frac{1}{2007})^2 - (2007 - \frac{1}{2007})^2 = 4 \cdot 2007 \cdot \frac{1}{2007} = 4.$$

γ) $(3κ + 2)^2 - (2κ + 3)^2 = [3κ + 2 - (2κ + 3)][3κ + 2 + (2κ + 3)] =$
$(3κ + 2 - 2κ - 3)\ (3κ + 2 + 2κ + 3)\ (κ - 1)\ (5κ + 5) = 5(κ - 1)(κ + 1)$

7 **Να υπολογίσετε τους αριθμούς x,ψ που ικανοποιούν τις ισότητες:**

α) $x^2 + ψ^2 + 6x + 9ψ = ψ - 25$, **β)** $2x^2 + ψ^2 + 2xψ + 4x + 4 = 0$

Λύση

α) $x^2 + ψ^2 + 6x + 9ψ = ψ - 25$ ή $x^2 + ψ^2 + 6x + 9ψ - ψ + 25 = 0$ ή
$x^2 + 6x + ψ^2 + 8ψ + 25 = 0$ ή $x^2 + 6x + 9 + ψ^2 + 8ψ + 16 = 0$
ή $(x + 3)^2 + (ψ + 4)^2 = 0$ ή $x + 3 = 0$ και $ψ + 4 = 0$ ή $x = -3$ και $ψ = -4$.

β) $2x^2 + ψ^2 + 2xψ + 4x + 4 = 0$ ή $x^2 + x^2 + ψ^2 + 2xψ + 4x + 4 = 0$ ή
$x^2 + 4x + 4 + x^2 + 2xψ + ψ^2 = 0$ ή $(x + 2)^2 + (x + ψ)^2 = 0$ ή $x + 2 = 0$
και $x + ψ = 0$ ή $x = -2$ και $ψ - 2 = 0$ ή $x = -2$ και $ψ = 2$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) η λάθος (Λ)

1. Ισχύει: $(x^3 + 2)^2 = x^6 + 4$.
2. Ισχύει: $(α - β)^2 = (β-α)^2$.
3. Δεν ισχύει ποτέ η ισότητα $(α + β)^2 = α^2 + β^2$.
4. Ισχύει: $α^2 + β^2 = (α + β)^2 - 2αβ$.
5. Αν $x+\frac{1}{x} = 4$ τότε $x^2+\frac{1}{x^2} = 16$.
6. Ισχύει $(α - β)^2 = α^2 - β^2$.
7. Αν ισχύει $α^2 + β^2 = 0$ τότε $α = 0$ ή $β = 0$.
8. Αν $α^2 + β^2 = 2αβ$ τότε $α = β$.
9. Ισχύει ότι $(3αβ-β)^2 = β(3α-1)^2$.
10. Αν $α^2 + β^2 -(α + β)^2 = 0$ τότε $α=0$ ή $β=0$.
11. Ισχύει $-(α+ β)(α - β) = β^2 -α^2$.
12. Ισχύει $α^3 + β^3 = (α + β)(α^2 + αβ + β^2)$.
13. Ισχύει πάντα $(α-β)^3 = -(β-α)^3$.
14. Ισχύει $(x-ψ)^2 = x^2 - 2x(-ψ) +(-ψ)^2$.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Αν $α - β = 6$ τότε η παράσταση $K = α^2 + β^2 - 2αβ + 3$ ισούται με:
   α. 0 **β.** 39, **γ.** 36 **δ.** 33 **ε.** 81

2. Αν $x + ψ = 20$ και $x^2 - ψ^2 = 80$ τότε η τιμή της παράστασης $Λ = ψ - x$ είναι ίση με:
   α. 4 , **β.** -4 **γ.** 1 **δ.** 10 **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

3. Η παράσταση $(α - 3)^2$ είναι ίση με:
α. $α^2 + 9$, **β.** $α^2 - 6α + 9$, **γ.** $(α + 3)(α - 3)$ **δ.** $α^2 – 9$

4. Αν $x - \frac{1}{x} = 3$, τότε η παράσταση $x^2 + \frac{1}{x^2}$ ισούται με:
α. 9, **β.** 11, **γ.** 7, **δ.** -9, **ε.** -11

5. Αν $α^2 + αβ + β^2 = 10$ και $α^3 - β^3 = 20$ τότε η παράσταση $α - β$ ισούται:
α. 2, **β.** -2, **γ.** 4 **δ.** -4 **ε.** καμία από τις παραπάνω.

6. Αν $(α + β)^2 = α^2 + β^2 + 2$, τότε οι αριθμοί α, β είναι:
α. αντίθετοι, **β.** ετερόσημοι, **γ.** αντίστροφοι, **δ.** Ό ένας θα είναι πάντα μηδέν, **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

7. Σε ένα παραλληλόγραμμο το μήκος του είναι $x + 4$, $x > 4$ και το εμβαδόν είναι $x^2 - 16$, τότε το αντίστοιχο ύψος είναι:
α. $x + 5$, **β.** $x - 4$, **γ.** $x + 4$, **δ.** $x^2 - 16$, **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

8. Η παράσταση $α^2 - αβ + γ^2$ είναι τέλειο τετράγωνο όταν:
α. $γ = β$, **β.** $γ = 2β$, **γ.** $γ = β^2$ **δ.** $γ = \frac{β^2}{4}$, **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

9. Αν $x + ψ = 4$ και $xψ = 3$ τότε η παράσταση $x^3 + ψ^3$ είναι ίση με:
α. 28, **β.** 36, **γ.** 64, **δ.** 16, **ε.** τίποτα από τα παραπάνω.

10. Η παράσταση $(α + β - γ)^2$ είναι ίση με:
α. $α^2 + β^2 - γ^2 + 2αβ - 2βγ - 2αγ$, **β.** $α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ + 2αγ + 2βγ$
γ. $α^2 + β^2 + γ^2 - 2αγ - 2βγ + 2αβ$, **δ.** $α^2 + β^2 + γ^2 + 2αβ - 2αγ + 2βγ$

11. Η παράσταση $2αβ - α^2 - β^2$ είναι ίση με:
α. $(α - β)^2$ **β.** $–(β - α)^2$ **γ.** $–(α + β)^2$ **δ.** $(α - β)(α + β)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 **Να βρεθούν τα αναπτύγματα:**

α) $(2x+3x^2)^2$, **β)** $(\frac{2}{3}x^2-4x)^2$, **γ)** $(-3x^3+2x)^2$, **δ)** $(4x^2\psi+2x\psi^2)^2$

ε) $(-3x-2x^3\psi)^2$ **στ)** $(\frac{1}{\alpha}+\alpha)^2$

2 **Να βρεθούν τα αναπτύγματα**:

α) $(\alpha+2\beta)^3$, **β)** $(2\alpha^2+3\alpha\beta^3)^3$, **γ)** $(3\alpha-2\beta^2)^3$, **δ)** $(\frac{3}{4}\alpha^2-4\alpha)^3$

ε) $(2x-\frac{2}{x})^3$ **στ)** $(\sqrt{3}-2)^3$

3 **Να βρεθούν τα αναπτύγματα:**

α) $(4x-\psi)\cdot(4x+\psi)$, **β)** $(3x^2-\psi)(3x^2+\psi)$, **γ)** $(x-\psi+2z)(x+\psi-2z)$

δ) $(4x-x^3)(4x+x^3)$ **ε)** $(x-\psi)(-x-\psi)(x^2+\psi^2)$.

4 **Να βρείτε τα αναπτύγματα**:

α) $(2x)^3-8$, **β)** $27x^3-64\psi^3$, **γ)** $8x^3+64$ **δ)** $64-(2x)^3$

ε) $(3\alpha+2\beta)^3-(3\alpha)^3$

5 **Να κάνετε τις πράξεις:**

α) $(2x+3)^2-(3x-1)(3x+1)$, **β)** $(3\alpha-2\beta)^2-(3\alpha+2\beta)^2+3\alpha(\beta-1)+3\alpha$

γ) $(1-x)(1+x)+(x-1)^2+2(x-1)$ **δ)** $(x-2)^2-(1-2x)^2+(3x-1)(3x+1)$

6 **Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^2-5x+1$. Να βρείτε:**

α) $P(x-10)$, **β)** $P(3-2x)$, **γ)** $P(-x+1)-2x$

7 **Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανεξάρτητα του x.**

$P(x)=(x^3-1)^2+(x^3+1)^2-2(x^3-1)(x^3+1)$.

$Q(x)=(x^2+1)^3+3(x^2+1)^2(1-x^2)+3(x^2+1)(1-x^2)^2+(1-x^2)^3$.

8 **Αν $\alpha+\beta=3$ και $\alpha\beta=-4$ να υπολογίσετε:**

α) $\alpha^2+\beta^2$, **β)** $\alpha^3+\beta^3$

9 Αν $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha\beta = 4$ να υπολογίσετε:
α) $\alpha^2 + \beta^2$, **β)** $\alpha^3 + \beta^3$, **γ)** $\alpha^4 + \beta^4$

10 Αν $\alpha + \beta + \gamma = 3$ και $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 27$ να υπολογίσετε:
α) $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$, **β)** $3\alpha\beta + 3\beta\gamma + 3\alpha\gamma - 2007$

11 Αν $\alpha + \beta = 6$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 26$ να υπολογίσετε:
α) $\alpha\beta$, **β)** $\alpha^3 + \beta^3$

12 Αν $x + \frac{1}{x} = 2$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, **β)** $x^3 + \frac{1}{x^3}$ **γ)** $x^4 + \frac{1}{x^4}$

13 Αν $x - \frac{1}{x} = 2$, $x > 0$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$, **β)** $(x + \frac{1}{x})^2$, **γ)** $x + \frac{1}{x}$

14 Να αποδείξετε ότι:
α) $(\alpha - 1)(\alpha + 1)(\alpha^2 + 1)(\alpha^4 + 1)(\alpha^8 + 1) = \alpha^{16} - 1$
β) $(\alpha + \beta + \gamma)^2 + (\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\alpha - \gamma)^2 = 3\alpha^2 + 3\beta^2 + 3\gamma^2$
γ) $(\frac{\alpha + \beta}{\alpha})^2 - (\frac{\alpha - \beta}{\alpha})^2 = \frac{4\beta}{\alpha}$

15 Να βρεθούν οι αριθμοί x,ψ ώστε να ισχύει:
α) $x^2 + 2x + 1 + \psi^2 + 4\psi + 4 = 0$, **β)** $x^2 + \psi^2 + 6x + 8\psi + 25 = 0$,
γ) $4x^2 + \psi^2 + 4x + 2\psi = -2$

16 **α)** Να κάνετε τις πράξεις: $\alpha^2 - (\alpha - 2) \cdot (\alpha + 2)$
β) Να δείξετε ότι: $2007^2 - 2005 \cdot 2009 = 4$

17 Να δείξετε ότι : $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)(x + 2)(x^2 - 4x + 4) = x^6 - 64$

18 Να αποδείξετε ότι ο αριθμός: $Κ = 2007^2 + 2007^2 \cdot 2008 + 2008^2 + 2007$ είναι τετράγωνο ενός φυσικού αριθμού.

19 Να γράψετε ως μία δύναμη τις παραστάσεις:
α) $27α^3 + 27α^2 x + 9α^2 x + x^3$
β) $(α + β)^2 + 2(α + β)(α - β) + (α - β)^2$

20 Αν, $α = \sqrt{3} - 1$, $β = \sqrt{3} + 1$, τότε να υπολογίσετε:
α) $αβ$, **β)** $α^2 + β^2$, **γ)** $α^2 - β^2$

21 Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:
α) $(x+\ldots)^2 = \ldots + 2 \cdot x + \ldots$, **β)** $(x - 2)^2 = \ldots + \ldots - \ldots$,
γ) $(\ldots + \ldots)^2 = 4x^2 + \ldots + 9ψ^2$, **δ)** $(\ldots - \ldots)^2 = x^2 + \ldots - 2$

22 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
α) $\ldots - \ldots = (2x - ψ^2)(ψ^2 + 2x)$, **β)** $(x^4 - 1) = (\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots)(\ldots + \ldots)$,
γ) $\ldots - \ldots = (x - ψ)(x^2 + \ldots + \ldots)$, **δ)** $x^3 + \ldots = (..+ 2)(\ldots - 2x + \ldots)$

23 Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
α) $(x + \ldots)^3 = \ldots + \ldots + \ldots + 8$, **β)** $(\ldots -2)^3 = ψ^3 \ldots - \ldots + \ldots -$

24 Να δείξετε ότι ο αριθμός $3^9 + 1$ είναι πολλαπλάσιο του 28.

25 Για ποιες τιμές των κ, λ ισχύουν πάντα οι ισότητες:
α) $(x - ψ)^2 = x^κ - 2xψ + ψ^{λ+1}$, **β)** $(x - ψ)(x + ψ) = x^{κ+3} - ψ^{4-λ}$

26 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α} = 90^0$. Αν $β + γ = \sqrt{20}$ και $α = 4$ να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

27 Να δείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι περιττός αριθμός.