1.3 Πολυώνυμα - Πρόσθεση και αφαίρεση πολυωνύμων

Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά. Αν δύο τουλάχιστον μονώνυμα δεν είναι όμοια, τότε το άθροισμά τους δεν είναι μονώνυμο, αλλά μία αλγεβρική παράσταση που λέγεται **πολυώνυμο**.

Π. χ. $\mathbf{4x^3 \psi - 7x \psi + 8x\psi^4}$

Κάθε μονώνυμο που περιέχεται σε ένα πολυώνυμο λέγεται **όρος του πολυωνύμου.**

Ειδικότερα, ένα πολυώνυμο που δεν έχει όμοιους όρους λέγεται:
- **διώνυμο**, αν έχει δύο όρους π.χ. $4\alpha^2 + \beta^3$
- **τριώνυμο**, αν έχει τρείς όρους π.χ. $4x^2 - 2x + 5$

Βαθμός ενός πολυωνύμου, ως προς μία ή περισσότερες μεταβλητές του, είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του.

Κάθε αριθμός μπορεί να θεωρηθεί και ως πολυώνυμο, οπότε λέγεται σταθερό πολυώνυμο. Ο αριθμός μηδέν, λέγεται μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό ενώ κάθε άλλο σταθερό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

Το πολυώνυμο $\mathbf{4x^5 \psi - 2x\psi^3 + 2x^7 \psi^3}$ είναι:

$7^{ου}$ βαθμού	ως προς x,
$3^{ου}$ βαθμού	ως προς ψ,
$10^{ου}$ βαθμού	ως προς x , ψ.

Αν ένα πολυώνυμο έχει μόνο μία μεταβλητή τότε μπορούμε με συντομία να το γράψουμε: P(x) ή Q(x) ή A(x) κ.λ.π.

Ετσι: $A(x) = x^3+2x^2-x+1$, $P(x) = -\frac{4}{5}x^2-2x+\sqrt{2}$.

Αν ένα πολυώνυμο με μια μεταβλητή μπορούμε να το γράψουμε έτσι ώστε κάθε όρος του να είναι μεγαλυτέρου βαθμού από τον επόμενό του, τότε λέμε ότι γράφουμε το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.

Π.χ. $P(x) = -4x^3 - 2x + 2$.

Αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου P(x) για x = α και συμβολίζουμε με P(α) λέμε τον αριθμό που θα πάρουμε, αν στη θέση του x βάλουμε τον αριθμό α και εκτελέσουμε τις πράξεις που σημειώνονται.

Ίσα πολυώνυμα λέγονται τα πολυώνυμα τα οποία έχουν, όρους ίσα μονώνυμα.

Αναγωγή ομοίων όρων λέμε την εργασία κατά την οποία, αν σε ένα πολυώνυμο υπάρχουν όμοια μονώνυμα, τότε μπορούμε να τα αντικαταστήσουμε με το άθροισμά τους.

Πρόσθεση – Αφαίρεση πολυωνύμων
Μπορούμε να προσθέτουμε ή να αφαιρούμε πολυώνυμα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες των πραγματικών.

1.4 Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

- **Πολλαπλασιασμός μονώνυμο με πολυώνυμο.**
  Στηρίζεται στην επιμεριστική ιδιότητα:
  $$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\,\gamma$$
  Έτσι:

  Για να πολλαπλασιάσουμε μονώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε το μονώνυμο με κάθε όρο του πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν

- **Πολλαπλασιασμός πολυώνυμο με πολυώνυμο**
  Στηρίζεται στην ιδιότητα:
  $$(\alpha + \beta)(\gamma + \delta) = (\alpha + \beta)\,\gamma + (\alpha + \beta)\,\delta = \alpha\gamma + \beta\gamma + \alpha\delta + \beta\delta$$

  Έτσι:

  Για να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμο με πολυώνυμο, πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο του ενός πολυωνύμου με κάθε όρο του άλλου πολυωνύμου και προσθέτουμε τα γινόμενα που προκύπτουν.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ρίζα ενός πολυωνύμου P(x) λέμε τον πραγματικό αριθμό ρ του οποίου η αριθμητική τιμή είναι 0, δηλ. όταν ισχύει $P(\rho) = 0$.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3\alpha x^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8$

α) Να κάνετε αναγωγή ομοίων όρων

β) Να γραφεί κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρεθεί ο βαθμός του.

γ) Για $\alpha = 0$ να βρείτε την αριθμητική τιμή του για $x = -2$.

Λύση

α) $P(x) = 3\alpha x^3 + 2x^2 - x + 6x^3 - 2x + 8 = (3\alpha + 6)x^3 + 2x^2 + (-1-2)x + 8 =$
$(3\alpha + 6)x^3 + 2x^2 - 3x + 8$

β) Το πολυώνυμο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις γράφεται:
$P(x) = (3\alpha + 6)x^3 + 2x^2 -3x + 8$.

Επειδή ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου είναι παράσταση διακρίνουμε περιπτώσεις:

1η περίπτωση:
Αν $3\alpha+6 \neq 0$ ή $3\alpha \neq -6$ ή $\alpha \neq -2$ τότε είναι $3^{ου}$ βαθμού.

2η περίπτωση:
Αν $3\alpha+6 = 0$ ή $3\alpha = -6$ ή $\alpha=-2$ τότε είναι $2^{ου}$ βαθμού

2 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 3x-1$

α) Να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $Q(x) = P(2x) + 2P(-x) + P(2)$

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $2P(x) - Q(x)$.

Λύση

α) $Q(x) = P(2x) + 2P(-x) +P(2) =$
$2(2x)^3 - 3(2x)-1 + 2[2(-x)^3-3(-x) -1] + 2 \cdot 2^3-3\cdot 2-1 =$
$2 \cdot 8x^3 - 6x -1+ 2(-2x^3 + 3x-1) + 16 - 6 - 1 = 16x^3 -6x -1 -4x^3 + 6x- 2 + 9 =$
$12x^3 +6$

β) $2P(x) - Q(x) = 2(2x^3- 3x -1) - (12x^3 + 6) = 4x^3 - 6x -2- 12x^3-6 = -8x^3-6x - 8$

3 Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^3 + \beta x^2 + \alpha x + 6$ και $Q(x) = (\lambda-1)x^3 + x^2 + \gamma$
α) Να βρείτε τον βαθμό των πολυωνύμων.
β) Να βρείτε το γ ώστε $P(0)-1 = Q(0)+7$.
γ) Να βρείτε τους $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ ώστε τα δύο πολυώνυμα να είναι ίσα.

Λύση

α) Το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού, ενώ ο βαθμός του $Q(x)$ εξαρτάται από το λ. Έτσι έχουμε: **i)** Αν $\lambda-1 = 0$ τότε είναι $2^{ου}$ βαθμού.
ii) Αν $\lambda-1 \neq 0$ ή $\lambda \neq 1$ τότε είναι $3^{ου}$ βαθμού.

β) $P(0) = 2 \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \alpha \cdot 0 + 6 = 6$ $Q(0) = (\lambda -1) \cdot 0^3 + 0^2 + \gamma = \gamma$. Άρα:
$P(0)-1 = Q(0) + 7$ ή $6 - 1 = \gamma$ ή $\gamma = 5$

γ) Για να είναι ίσα πρέπει: $2 = \lambda - 1$ και $\beta = 1$ και $\alpha = 0$ και $\gamma = 6$
Άρα $\lambda = 3$ και $\beta = 1$ και $\alpha = 0$ και $\gamma = 6$.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν $P(x) = 2x^2(x^4 - 1)$ τότε $P(-x) = P(x)$.

2. Το πολυώνυμο $P(x) = -2$ είναι μηδενικού βαθμού.

3. Το πολυώνυμο $P(x) = 0$ είναι μηδενικού βαθμού.

4. Το πολυώνυμο $P(x)$ και $P(2x)$ είναι ίδιου βαθμού.

5. Αν ένα πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $P^2(x)$ είναι $6^{ου}$ βαθμού.

6. Το πολυώνυμο $P(x) = 0 \cdot x^3 - 2x + 5$ είναι $3^{ου}$ βαθμού.

7. Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x) = (3x^2 - x)8(x^2 - 1) + x^{10} - 3$ είναι 18.

8. Αν δύο πολυώνυμα δεν έχουν βαθμό τότε είναι ίσα.

9. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ είναι $3^{ου}$ βαθμού και το $Q(x)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ είναι $6^{ου}$ βαθμού.

10. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού και το Q(x) είναι $4^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο P(x) - Q(x) είναι $4^{ου}$ βαθμού.

11. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι $2^{ου}$ βαθμού και το Q(x) είναι $3^{ου}$ βαθμού τότε το πολυώνυμο 2P(x) - 4Q(x) είναι $2^{ου}$ βαθμού.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

1. Αν για το πολυώνυμο P(x) ισχύει: $(x^3+2)P(x)+3 = x^5-2x+1$ τότε το P(x) είναι:
α. τρίτου βαθμού, **β.** τετάρτου βαθμού, **γ.** δευτέρου βαθμού
δ. πρώτου βαθμού, **ε.** κανένα από τα προηγούμενα.

2. Αν $x^2 = x + 3$, τότε $x^3 =$
α. $x+6$. **β.** x^2+2x+3, **γ.** $4x+3$, **δ.** $4x^2+3$ **ε.** x^2+7

Ε.Μ.Ε. 1993

3. Αν $x=\frac{1}{6}$ τότε η παράσταση $(2-\frac{1}{2x})\cdot(3-\frac{1}{3x})$ ισούται με:
α. -12 , β) -1 , γ) $\frac{25}{2}$, δ) 1, ε) 12

Ε.Μ.Ε 1992

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Δίνονται οι παραστάσεις:

$A = x^6-2x+\sqrt{x}$, $B= -x^3-2x+x^2-1$, $\Gamma = x^{-2}+4x+7$,

$\Delta = 0$, $E= \frac{3}{5}$,

α) Ποιές από τις παραστάσεις αυτές παριστάνουν πολυώνυμα.

β) Να τις διατάξετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις.

γ) Ποιος είναι ο βαθμός του κάθε πολυωνύμου

2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(3x^2-2x)(4x^3+4x)$, β) $(x^4-2x+2)(x^5-2x)$, γ) $(x-3)(x-2)x$

δ) $(\alpha^2-3\cdot\alpha+1)\cdot(\alpha-2)+(\alpha^3-2\cdot\alpha)(\alpha^2-\alpha)$

3 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 4x^2-2\alpha\cdot x+3$

α) Να βρείτε την τιμή του α ώστε $P(-2)=-1-\alpha$.

β) Για α= -4 να λύσετε την εξίσωση $P(0)+4x-2P(1)= 3x$

4 Αν $P(x) = 2x^3-x+1$ και $Q(x)= x-3$ να βρείτε τα πολυώνυμα
α) $-P(x)\cdot 2Q(x)$ **β)** $2P(x)\cdot[2Q(x)-x+2]$ **γ)** $[2P(x)-1]\cdot[Q(x)-2]$

5 Αν $P(x) = 2x(-x^2+3x)(x-2)$, και $Q(x) = \alpha(x^4+1) + \beta x^3+\gamma x^2+x+1$, να βρείτε τις τιμές των α, β, γ, δ ώστε τα πολυώνυμα P(x) και Q(x) να είναι ίσα.

6 Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) =2x^2$.
α) Να προσδιορίσετε τον βαθμό του.
β) Να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x) =P(P(x))-1$.

7 Να βρείτε το πολυώνυμο το οποίο αν αφαιρεθεί από το $5x^2-2x+1$ θα προκύψει το πολυώνυμο $4x^2-3x+5$.

8 Δίνεται το πολυώνυμο $A(x) = \kappa\cdot x^2-\lambda x+3$
α) Αν $A(x)+A(-x) = 8x+3$ να βρείτε το λ
β) Για την τιμή του λ που βρήκατε να υπολογίσετε το κ όταν $A(1)=10$

9 Να προσδιορισθεί ο πραγματικός αριθμός α, ώστε το πολυώνυμο $P(x) =9x^3-3x+8x-27$ να παίρνει τη μορφή $Q(x) = \alpha(x^3+x)-3x^2+(x-3)(x^2+3x+9)$.

10 Για την παραγωγή x μονάδων ενός προιόντος την εβδομάδα, μία εταιρία έχει κόστος $K(x) = 500x+50000$ ευρώ. Τις x μονάδες την εβδομάδα τις διαθέτει η εταιρεία στην τιμή $T(x) = 2000-2x$ ευρώ ανά μονάδα.

α) Να βρείτε το πολυώνυμο που δίνει το κέρδος από την πώληση x μονάδων από το προίον την εβδομάδα

β) Να βρείτε το κόστος όταν δεν παράγει προίον και να το δικαιολογήσετε.

γ) Να βρείτε το κέρδος αν πουλήσει 100 μονάδες την εβδομάδα.