

1.2 Μονώνυμα - Πράξεις με μονώνυμα

Αλγεβρικές παραστάσεις - Μονώνυμα

Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε έκφραση που περιέχει μόνο αριθμούς.

π.χ. $8 \cdot 3 + 4 \cdot 5$, $2 \cdot 4^3 - 3 \cdot 5$.

Αλγεβρική παράσταση λέγεται κάθε έκφραση, από αριθμούς και μεταβλητές ή μόνο μεταβλητές, που συνδέονται με τα σύμβολα των πράξεων.

Μία αλγεβρική παράσταση λέγεται **ακέραια**, όταν μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.

π.χ. $3\psi + x^3$, $\frac{2}{5} \alpha + \beta^5$.

Αν σε μία αλγεβρική παράσταση αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και κάνουμε τις πράξεις, θα προκύψει ένας αριθμός που λέγεται **αριθμητική τιμή** ή απλά **τιμή** της αλγεβρικής παράστασης.

Μονώνυμα λέγονται οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού.

π.χ. $5x$, α^3 , $\sqrt{5} x\omega^4$, $\frac{2}{5} \alpha\beta^6$

Σ' ένα μονώνυμο ο αριθμητικός παράγοντας λέγεται **συντελεστής** του μονωνύμου, ενώ το γινόμενο όλων των μεταβλητών του λέγεται **κύριο μέρος** του μονωνύμου.

Στο μονώνυμο $3x^4\psi$.

Το 3 είναι ο συντελεστής

Το $x^4\psi$ είναι το κύριο μέρος

Ο εκθέτης μιάς μεταβλητής λέγεται **βαθμός** του μονωνύμου ως προς τη μεταβλητή αυτή, ενώ **βαθμός** του μονωνύμου ως προς όλες τις μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών των μεταβλητών του.

Το μονώνυμο $3x^4\psi$ είναι:

| | | |
|------------|---------------|-------------------------------------|
| 4ου | βαθμού | ως προς x |
| 1ου | βαθμού | ως προς ψ |
| 5ου | βαθμού | ως προς x, ψ |

Τα μονώνυμα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος λέγονται **όμοια**, π.χ. τα μονώνυμα $\frac{3}{4}x^2\psi, -6x^2\psi, x^2\psi$ είναι όμοια.

Τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή λέγονται **ίσα**, ενώ, αν έχουν αντίθετους συντελεστές, λέγονται **αντίθετα**, π.χ. τα μονώνυμα $2x^5\psi^4$ και $-2x^5\psi^4$, είναι αντίθετα.

Μπορούμε επίσης και τους αριθμούς να τους θεωρούμε ως μονώνυμα και τους ονομάζουμε **σταθερά** μονώνυμα. Ειδικότερα, ο αριθμός **0** λέγεται **μηδενικό μονώνυμο** και δεν έχει βαθμό, ενώ όλα τα άλλα σταθερά μονώνυμα είναι μηδενικού βαθμού.

Παρατήρηση

Για να βρούμε τον βαθμό ενός μονωνύμου, πρέπει ο συντελεστής του μονωνύμου να είναι διάφορος του μηδενός.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε τα μονώνυμα $(3\lambda-2)x^3\psi^2$ και $(\lambda-2)x^3\psi^2$ **α)** να είναι ίσα, **β)** να είναι αντίθετα.

Λύση

α) Για να είναι ίσα πρέπει: $3\lambda - 2 = \lambda - 2$ ή $3\lambda - \lambda = -2 + 2$ ή $2\lambda = 0$ ή $\lambda = 0$

β) Για να είναι αντίθετα πρέπει: $(3\lambda - 2) + (\lambda - 2) = 0$ ή $3\lambda + \lambda = 2 + 2$ ή $4\lambda = 4$ ή $\lambda = 1$

- 2** Δίνεται το μονώνυμο $(\alpha - 3)x^3$ να βρείτε τον βαθμό του.

Λύση**1^η περίπτωση:**

Αν $\alpha - 3 = 0$ ή $\alpha = 3$ τότε το μονώνυμο είναι το μηδενικό και δεν έχει βαθμό.

2^η περίπτωση:

Αν $\alpha - 3 \neq 0$ ή $\alpha \neq 3$ τότε το μονώνυμο είναι 3^{ου} βαθμού.

Α. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Δύο μονώνυμα είναι όμοια όταν είναι ίδιου βαθμού.
2. Ο βαθμός του μονωνύμου $2007x^4\psi^3\omega$ είναι ίσος με 7.
3. Το μονώνυμο $(a - 4)x^5$ είναι 5^ο βαθμού για κάθε τιμή του a .
4. Η παράσταση $x^4\psi^2 + x^4\psi^2$ είναι μονώνυμο.
5. Η παράσταση $3x^{-2}\psi^3$ είναι μονώνυμο.
6. Οι παραστάσεις $4x^{-2}\psi^3$, $6x^{-2}\psi^3$ είναι όμοια μονώνυμα.
7. Η αλγεβρική παράσταση $4a^{\lambda+3}\beta^2$ είναι μονώνυμο για κάθε τιμή του ακεραίου λ .
8. Τα αντίθετα μονώνυμα είναι ίδιου βαθμού.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

1. Τα μονώνυμα $(3a + 1)x^3\psi^{a+2}$, $-5x^3\psi^2$ είναι όμοια αν το a είναι:
α. -2, **β.** 0, **γ.** 2, **δ.** 4.
2. Η παράσταση $2x^2\psi^k + 3x^\lambda\psi^3$ είναι μονώνυμο αν:
α. $\lambda = 2$, **β.** $\kappa = 3$ **γ.** $\lambda = 2$ ή $\kappa = 3$ **δ.** $\lambda = 2$ και $\kappa = 3$.
3. Αν η παράσταση $2x^\kappa\psi^\nu$ είναι μονώνυμο. Τότε οι αριθμοί κ , ν είναι:
α. ίσοι, **β.** φυσικοί, **γ.** ακέραιοι, **δ.** θετικοί.
4. Ο βαθμός του μονωνύμου $[2x^2(x\psi)^2]^3$ ως προς x είναι:
α. 6^ο βαθμού. **β.** 4^ο βαθμού **γ.** 7^ο βαθμού **δ.** 12^ο βαθμού.
5. Δίνεται το μονώνυμο $A = 3x^2\psi^3$. Η αλγεβρική τιμή του για $x = -3$ είναι -27. Τότε η τιμή του ψ είναι:
α. 1, **β.** -1, **γ.** 27, **δ.** -27.

1 Ποιες από τις παρακάτω αλγεβρικές παραστάσεις είναι μονώνυμα;

α) $-\frac{4}{3}x^2\psi^3$ β) $4-3x^2\psi^3$ γ) $3x^2\psi^{-3}$ δ) $(4-\sqrt{5})x^3\psi^5$ ε) $\frac{x^4 \cdot \psi^4}{8}$

στ) $\frac{x^5\psi^3}{\omega^2}$ ζ) $\frac{x^4\psi^8}{\omega^{-4}}$ η) $\frac{3}{4}\sqrt{x}\psi^4$

2 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

| Μονώνυμο | Συντε- λεστής | Κύριο μέρος | Βαθμός ως προς x | Βαθμός ως προς ψ | Βαθμός ως προς x, ψ |
|------------------------------|------------------|----------------|---------------------|---------------------|---------------------------|
| $x\psi^4$ | | | | | |
| $\frac{2x^4\psi^2}{3x^{-2}}$ | | | | | |
| $(-\sqrt{3}-2)x^4$ | | | | | |
| $(-\sqrt{5}x^3\psi)^2$ | | | | | |

3 Να γράψετε τα μονώνυμα που εκφράζουν την επιφάνεια και τον όγκο κύβου ακμής x. Να προσδιορίσετε το συντελεστή, το κύριο μέρος και το βαθμό κάθε μονωνύμου. Ποια είναι η αριθμητική τιμή κάθε μονωνύμου για $x = 5$.

4 Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παρακάτω παράστασεις:

α) $A = 3\alpha^{\lambda+2}\beta^3 + 6\alpha^5\beta^\lambda$

β) $B = (\lambda-2)x^3\psi^2 + (\lambda+3)x^2\psi^3$

να είναι μονώνυμα και να βρείτε τον βαθμό τους για τις διάφορες μεταβλητές.

5 Να γράψετε στην τελική τους μορφή τα μονώνυμα:

α) $3x^4\psi^2 + (x^2\psi)^2$

β) $(x\psi^2)^2x$

γ) $(x^2\psi^3)^2 \cdot (x\psi)^3$

- 6** Δίνεται είναι ισοσκελές τραπέζιο με μικρή βάση x . Αν η μεγάλη βάση είναι επταπλάσια της μικρής, οι μη παράλληλες πλευρές είναι πενταπλάσιες της μικρής τότε να υπολογίσετε:

- α)** το μονώνυμο που παριστάνει το ύψος.
β) το μονώνυμο που παριστάνει το εμβαδόν.
γ) το μονώνυμο που παριστάνει την περίμετρο.

Πρόσθεση μονωνύμων

- α)** Αν τα μονώνυμα είναι όμοια τότε το άθροισμά τους είναι μονώνυμο όμοιο με αυτά και έχει συντελεστή το άθροισμα των συντελεστών τους.
β) Αν τα μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το άθροισμα τους δεν είναι μονώνυμο αλλά μία αλγεβρική παράσταση.

Γινόμενο μονωνύμων

Το γινόμενο μονωνύμων είναι ένα μονώνυμο που έχει ως συντελεστή το γινόμενο των συντελεστών τους και ως κύριο μέρος το γινόμενο όλων των μεταβλητών τους με εκθέτη κάθε μεταβλητής το άθροισμα των εκθετών της.

Διαίρεση μονωνύμων

Για να διαιρέσουμε δύο μονώνυμα, διαιρούμε τους συντελεστές και αφαιρούμε τους εκθέτες των μεταβλητών

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το γινόμενο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο.
2. Το πηλίκο μονωνύμων δεν είναι πάντα μονώνυμο.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1** Να κάνετε τις πράξεις:

α) $2x^2\psi - 4\psi x^2$, **β)** $2\alpha^3\beta^6 - 6(\alpha\beta^2)^3$, **γ)** $2x^3\psi - 3x + 6x^3\psi + 3x$, **δ)** $\frac{1}{4}x^5\psi - \frac{1}{2}x^5\psi$,
ε) $3x^2\psi^4 + (2x\psi^2)^2$, **στ)** $\sqrt{8}x^2\psi^4 - \sqrt{2}(x\psi^2)^2$

Λύση

α) $2x^2\psi - 4\psi x^2 = (2-4)x^2\psi = -2x^2\psi$, **β)** $2\alpha^3\beta^6 - 6(\alpha\beta^2)^3 = 2\alpha^3\beta^6 - 6\alpha^3\beta^6 = (2-6)\alpha^3\beta^6 = -4\alpha^3\beta^6$, **γ)** $2x^3\psi - 3x + 6x^3\psi + 3x = (2+6)x^3\psi = 8x^3\psi$

δ) $\frac{1}{4}x^5\psi - \frac{1}{2}x^5\psi = (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})x^5\psi = (\frac{1}{4} - \frac{2}{4})x^5\psi = -\frac{1}{4}x^5\psi$

ε) $3x^2\psi^4 + (2x\psi^2)^2 = 3x^2\psi^4 + 4x^2\psi^4 = (3+4)x^2\psi^4 = 7x^2\psi^4$

στ) $\sqrt{8} x^2\psi^4 - \sqrt{2} (x\psi^2)^2 = \sqrt{8} x^2\psi^4 - \sqrt{2} x^2\psi^4 = (\sqrt{8} - \sqrt{2})x^2\psi^4 = (2\sqrt{2} - \sqrt{2})x^2\psi^4 = \sqrt{2} x^2\psi^4$

2 Να βρείτε τα γινόμενα:

α) $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2$, β) $-3x^3\psi^2 \cdot (-2x\psi^3)$, γ) $6x^2 \cdot (-2x^6\psi^2) \cdot (5x^3 \cdot \psi^4)$

δ) $(2x)^3 \cdot 3x^2$

Λύση

α) $3x^4 \cdot 2x^5 \cdot (-4x)^2 = 3x^4 2x^5 16x^2 = (3 \cdot 2 \cdot 16)(x^4 x^5 x^2) = 96x^{11}$

β) $-3x^3 \psi^2 \cdot (-2x\psi^3) = (-3) \cdot (-2) \cdot (x^3 \psi^2 x \psi^3) = 6 x^4 \psi^5$

γ) $6x^2 \cdot (-2x^6 \psi^2) \cdot (5x^3 \psi^4) = 6(-2)5 \cdot (x^2 x^6 x^3 \psi^2 \psi^4) = -60 x^{11} \psi^6$

δ) $(2x)^3 \cdot 3x^2 = 8x^3 3x^2 = 24x^5$

3 Να βρείτε τα πηλίκα:

α) $4x^3 : 2x$, β) $-2x^7\psi^4 : (-x\psi^3)$, γ) $x^2\psi^8 : (x^5\psi^6)$

Λύση

α) $4x^3 : 2x = 4x^3 \frac{1}{2x} = 2x^2$, β) $-2x^7\psi^4 : (-\frac{1}{2}x\psi^3) = -2x^7\psi^4 \frac{-2}{x\psi^3} =$
 $= -2(-2) \frac{x^7\psi^4}{x\psi^3} = 4x^6\psi^3$ γ) $\frac{3}{4}x^2\psi^8 : (\frac{2}{5}x^5\psi^6) = \frac{3x^2\psi^8}{4} \cdot \frac{2x^5\psi^6}{5} =$
 $= \frac{6x^7\psi^{14}}{20} = \frac{3}{10}x^7\psi^{14}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Το πηλίκο δύο αντίθετων μονώνυμων είναι πραγματικός αριθμός.
2. Η διαίρεση μεταξύ μονωνύμων γίνεται μόνο αν τὰ μονώνυμα είναι όμοια.
3. Αν δύο μονώνυμα δεν είναι όμοια τότε το γινόμενο δεν είναι μονώνυμο.
4. Το πηλίκο δύο όμοιων μονωνύμων είναι πραγματικός αριθμός.
5. Η διαίρεση δύο μονωνύμων γίνεται αν ο αριθμητής είναι μεγαλύτερου βαθμού από τον παρονομαστή.

6. Το άθροισμα ομοίων μονωνύμων είναι μονώνυμο.
7. Το γινόμενο μονωνύμων είναι μονώνυμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να κάνετε τις πράξεις:

α) $-8x^3\psi - 4\psi x^3 + 10x^3\psi$, β) $4x^2 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x^2$, γ) $6\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{32}x^2$

δ) $\frac{3}{10}x^2 - \frac{3}{5}x^2 + 2x^2$, ε) $\frac{6}{5}x^2 - 1,6x^2 + 3,4x^2$, στ) $3,45x\psi + 2,45\psi x$

2 Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

α) $-4x6x^3$, β) $2x\psi^3(-2x^2)$, γ) $-3x\psi^2(-2\psi^3)$, δ) $-2x^3\psi(-4x\psi)(-5x\psi^2)$

ε) $(-\frac{3}{5}x\psi^2) \cdot (\frac{25}{6}x^2\psi)$, στ) $(\frac{1}{3}x\psi) \cdot (6x\psi^3)(-\frac{1}{2}x\psi^2)$

3 Να υπολογίσετε τα πηλίκα:

α) $3\alpha^5 : (2\alpha^2)^2$, β) $4\alpha^5\beta^4 : (\frac{3}{4}\alpha^2\beta^3)$, γ) $-x^2 : x^4$ δ) $24x^3\psi^2 : (-2x\psi)^3$

ε) $x\psi^3\omega : (x\omega^2)^3$ στ) $-27\alpha\beta^3(\gamma x)^2 : (-3\alpha x\beta\gamma)^2$