Γ. Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x και συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ λέμε τον θετικό αριθμό α πού όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

π.χ. $\sqrt{9} = 3$, αφού $3^2 = 9$
Αν $x = 0$ ορίζουμε: $\sqrt{0} = 0$
Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός αριθμός.

Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2} = |x|$

Γενικά ισχύει: Αν $x \geq 0$ τότε $(\sqrt{x})^2 = x$

Ιδιότητες των ριζών

α) Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$ τότε: $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

β) Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ τότε: $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Απόδειξη

α) Υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους χωριστά.

- $(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta})^2 = (\sqrt{\alpha})^2 \cdot (\sqrt{\beta})^2 = \alpha \cdot \beta$.
- $(\sqrt{\alpha \cdot \beta})^2 = \alpha \cdot \beta$.

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha \cdot \beta}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο $\alpha \cdot \beta$, οπότε είναι ίσοι.

Άρα $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha \cdot \beta}$

β) Υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους χωριστά.

- $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{\alpha})^2}{(\sqrt{\beta})^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$
- $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο $\dfrac{\alpha}{\beta}$, οπότε είναι ίσοι.

Άρα $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$

Αν α, β θετικοί αριθμοί τότε:

$$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha+\beta}$$

και

$$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha-\beta}, \qquad \alpha>\beta>0$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Ένας πραγματικός αριθμός α λέγεται μη αρνητικός όταν $\alpha \geq 0$.

2. Η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ ισχύει όταν ένας τουλάχιστον από τους α,β είναι 0 και ο άλλος θετικός ή 0.

3. Η υπόρριζη ποσότητα ενός ριζικού είναι πάντα μη αρνητικός αριθμός

4. Η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού είναι 0 ή θετικός.

5. Τετραγωνική ρίζα έχουν μόνο οι μη αρνητικοί αριθμοί.

6. Δεν μπορούμε να κάνουμε πρόσθεση ή αφαίρεση μεταξύ τετραγωνικών ριζών αν δεν έχουμε την ίδια υπόρριζη ποσότητα.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 **α) Αν α, β είναι δύο μη αρνητικοί αριθμοί, αποδείξτε ότι:**

$$\sqrt{\alpha^2\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta}$$

β) Αν β ≥ 0, αποδείξτε ότι: $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=|\alpha|\sqrt{\beta}$

Απόδειξη

α) $\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta}$

β) $\sqrt{\alpha^2\beta}=\sqrt{\alpha^2}\cdot\sqrt{\beta}=|\alpha|\cdot\sqrt{\beta}$

2 **Να αποδειχθεί ότι:**

α) $\sqrt{12}=3\cdot\sqrt{2}$, β) $\sqrt{50}-\sqrt{8}=3\cdot\sqrt{2}$

Απόδειξη

α) $\sqrt{12} = \sqrt{4\cdot 3} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2^2}\cdot\sqrt{3} = 2\cdot\sqrt{3}$

β) $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{25\cdot 2} - \sqrt{4\cdot 2} = \sqrt{25}\cdot\sqrt{2} - \sqrt{4}\cdot\sqrt{2} = 5\cdot\sqrt{2} - 2\cdot\sqrt{2} = (5-2)\cdot\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

- Αναλύουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στα ριζικά, κατά τέτοιον τρόπο ώστε ένας τουλάχιστον από τους παράγοντες να τετράγωνο θετικού ακεραίου.

3 **Να μετατραπούν τα παρακάτω κλάσματα πού έχουν άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.**

Λύση

α) $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \dfrac{5\cdot\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$. β) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

γ) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot(\sqrt{3})^2} = \dfrac{3\cdot\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

δ) $\dfrac{5}{\sqrt{8}} = \dfrac{5}{\sqrt{4\cdot 2}} = \dfrac{5}{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5}{2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot(\sqrt{2})^2} = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 2} = \dfrac{5\cdot\sqrt{2}}{4}$

ε) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{24}} = \sqrt{\dfrac{3}{24}} = \sqrt{\dfrac{3}{24}} = \sqrt{\dfrac{1}{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{8}} = \dfrac{1}{\sqrt{4\cdot 2}} = \dfrac{1}{2\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2\cdot(\sqrt{2})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

στ) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3})^2+\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-(\sqrt{2})^2} =$

$= \dfrac{3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{3-2} = 3\cdot(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

4 **Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:**

$A=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{36}}}}$, $B=\sqrt{7+3\sqrt{1+8\sqrt{1}}}$

Λύση

$A=\sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{3+\sqrt{36}}}} = \sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{3+6}}} = \sqrt{14+\sqrt{1+\sqrt{9}}} = \sqrt{14+\sqrt{1+3}} =$
$= \sqrt{14+\sqrt{4}} = \sqrt{14+2} = \sqrt{16} = 4.$

$B= \sqrt{7+3\sqrt{1+8\sqrt{1}}} = \sqrt{7+3\sqrt{1+8}} = \sqrt{7+3\sqrt{9}} = \sqrt{7+3?3} = \sqrt{7+9} = \sqrt{16} = 4.$

5 **Να βρείτε τις τιμές του x για να έχουν νόημα οι παραστάσεις:**
$A=\sqrt{x-3}$, $B=\sqrt{4-2x}$, $\Gamma=\sqrt{2-3x}+\sqrt{x+1}$.

Λύση

$A=\sqrt{x-3}$, Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει : $x-3 \geq 0$ ή $x \geq 3$.

$B=\sqrt{4-2x}$ Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει: $4-2x \geq 0$ ή $-2x \geq -4$ ή $2x \leq 4$ ή $x \leq 2$.

$\Gamma=\sqrt{2-3x}+\sqrt{x+1}$. Για να ορίζεται η παράσταση πρέπει : $2-3x \geq 0$ και $x+1 \geq 0$ ή $-3x \geq -2$ και $x \geq -1$ ή $x \leq \frac{2}{3}$ και $x \geq -1$ άρα $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$.

6 **Να δείξετε ότι:**

α) Η τετραγωνική ρίζα του $4+2\sqrt{3}$ είναι ο $\sqrt{3}+1$

β) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$

Λύση

α) Αρκεί να δείξουμε ότι: $\sqrt{3}+1)^2 = 4+2\sqrt{3}$

$(\sqrt{3}+1)^2 = (\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}+1) = \sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}+1 =$
$3+2\sqrt{3}+1 = 4+2\sqrt{3}$

β) Αρκεί να δείξουμε ότι: $(\sqrt{3}-1)^2 = 4-2\sqrt{3}$

$((\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1) = \sqrt{3}?\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}+1 = (\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}+1 =$
$3-2\sqrt{3}+1 = 4-2\sqrt{3}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

2. Αν $\alpha \cdot \beta \geq 0$ τότε ισχύει $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$.

3. Ισχύει $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, β.

4. Ισχύει $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$.

5. Ισχύει $\sqrt{0,36} = 0,18$.

6. $\sqrt{16\alpha^2} = 4\alpha$ για κάθε πραγματικό αριθμό α.

7. Ισχύει $\sqrt{(-4)^2} = -4$.

8. Οι παραστάσεις $\sqrt{\alpha^2}$ και $(\sqrt{\alpha})^2$ είναι πάντοτε ίσες.

9. Ισχύει $\sqrt{\alpha^2 \cdot \beta^2} = \sqrt{\alpha^2} \cdot \sqrt{\beta^2}$ για κάθε πραγματικό αριθμό α, β.

10. Η ισότητα $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$ ισχύει όταν $\alpha \leq 0$.

11. Ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2 + \beta} = |\alpha| + \sqrt{\beta}$.

12. Ισχύει ότι $\sqrt{49} = \pm 7$.

13. Ισχύει ότι $\sqrt{4+9} = 2+3$.

14. Ισχύει ότι $\sqrt{98} + \sqrt{50} = \sqrt{100} + \sqrt{8}$.

15. Η τετραγωνική ρίζα του 4 είναι το 2 και το –2.

16. Η τετραγωνική ρίζα του -4 είναι το -2.

17. Η τετραγωνική ρίζα του 1 είναι το 1.

18. Ο αντίστροφος του $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ είναι ο $\sqrt{7} + \sqrt{6}$.

19. Το 5 δεν έχει τετραγωνική ρίζα.

20. Ισχύει $\sqrt{-4} = -2$.

Β. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

1. Ο αριθμός $\sqrt{25-16}$ είναι ίσος με:
α. 5-4, **β.** 3, **γ.** 9, **δ.** 2

2. Αν η διαγώνιος ενός τετραγώνου είναι 2 cm τότε το εμβαδόν του είναι ίσο με:
α. 2 , **β.** $\sqrt{2}$, **γ.** 1 **δ.** $2\cdot\sqrt{2}$, **ε.** 4

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο είναι ισοσκελές και έχει υποτείνουσα 20 cm.
Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς δίνει το εμβαδόν του.
α. 200 cm^2, **β.** 100 cm^2, **γ.** 400 cm^2 **δ.** $\sqrt{200}$ cm^2.

4. Η ισότητα $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$ ισχύει όταν:
α. $\alpha \geq 0$, **β.** $\alpha = 0$ **γ.** $\alpha \leq 0$. **δ.** για κάθε πραγματικό αριθμό α.

5. Η ισότητα $\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ ισχύει :
α. όταν α, β είναι ομόσημοι. **β.** για κάθε α, β. **γ.** όταν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$

6. Η ισότητα $\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}} = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$ ισχύει:
α. όταν α, β ομόσημοι **β.** $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$ **γ.** $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$.

Γ. Ερωτήσεις συμπλήρωσης

1. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω πίνακες.

				Άθροισμα		Γινόμενο	
α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\cdot\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
4	49						
25	324						
169	196						

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

Α $= \sqrt{2}\cdot\sqrt{50} + \sqrt{7+\sqrt{4}} - \sqrt{3-\sqrt{4}}$, **Β**$= \sqrt{0{,}25} + \sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{3{,}6}$

Γ$= \sqrt{\frac{22}{11}}\cdot\sqrt{\frac{30}{15}} + \sqrt{\frac{20}{4}}\cdot\sqrt{\frac{10}{2}}$

2 Να βρείτε τις τιμές του x, ώστε να έχουν νόημα οι παραστάσεις:

Α$= \sqrt{x+1}$, Β$=\sqrt{4-3x}$, **Γ**$= \sqrt{9-3x} + \sqrt{x-2}$, **Δ** $= \sqrt{\frac{3}{2}-x}$

3 Να δείξετε ότι ο αριθμός $+\sqrt{5}$ είναι η τετραγωνική ρίζα του $+\sqrt{5}$

4 Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

Α $= 5\sqrt{\sqrt{16}} - \sqrt{20\cdot\sqrt{25}} + \sqrt{2\cdot\sqrt{64}}$

Β $= \sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{6}{2}}\,\sqrt{\frac{8}{4}}$, Γ$= \sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}$

5 Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

Α$= \sqrt{(3-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(1-\sqrt{5})^2}$, **Β**$= \sqrt{24} + \frac{12}{\sqrt{6}} - 4\sqrt{(\sqrt{6}-3)^2}$

6 Αν είναι **Α**$=\frac{2}{2-\sqrt{5}}$, **Β**$=\frac{2}{2+\sqrt{5}}$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
Α· Β και **Α - Β**.

7 Να τρέψετε τα παρακάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2\cdot\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{4}{-\sqrt{5}}, \sqrt{\frac{3}{8}}, \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}}$

i) $\frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

8 Να αποδείξετε ότι:

i) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

ii) $\sqrt{6+2\sqrt{5}} = 1+\sqrt{5}$

9 Να λύσετε τις εξισώσεις :

i) $\sqrt{3}+x=\sqrt{12}-x$, **ii)** $\sqrt{3}\cdot x=\sqrt{27}$ **iii)** $\frac{x}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}$

iv) $2x+\frac{2}{\sqrt{2}}=x+\sqrt{2}$

10 Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 12. Αν Ε είναι το μέσο της διαμέσου ΑΔ, να υπολογίσετε το μήκος ΒΕ.

11 Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα α και κάθετες πλευρές β, γ, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\alpha\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\beta^2$

ii) $\sqrt{\beta\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}}+\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\sqrt{\gamma\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}$

12 Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί: $4+\sqrt{5}$ και $\frac{4-\sqrt{5}}{11}$ είναι αντίστροφοι.

13 Αν οι πλευρές ενός ορθογωνίου είναι $\alpha=5+2\sqrt{2}$ cm και $\beta=5-2\sqrt{2}$ cm να βρείτε:

α) Την περίμετρο και το εμβαδόν του.

β) Την πλευρά του τετραγώνου που είναι ισοδύναμο με το ορθογώνιο.

14 Ένα ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο έχει εμβαδόν 24 cm^2. Σχηματίζουμε το τετράγωνο, που έχει πλευρά την υποτείνουσα του τριγώνου. Να υπολογίσετε την διαγώνιο του τετραγώνου.

15 Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ =ΑΓ), έχει περίμετρο 18 cm. Αν η βάση του είναι 8m, να υπολογίσετε:

α) Το ύψος ΑΔ.

β) Αν Ε είναι το μέσον του ΑΔ να βρείτε το μήκος ΓΕ.