12 Να βρείτε τις θετικές τιμές του ακεραίου κ ώστε ο αριθμός $A = \frac{3}{2k+1}$ να είναι ακέραιος.

13 Αν οι α, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύουν:
$\alpha - 2\beta = 5$, $2\beta - \gamma = 7$, $\gamma - 2\delta = 5$ και $\delta + 3 = 2$, να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma + \delta$.

B. Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Αν α είναι πραγματικός αριθμός και ν φυσικός με $\nu \geq 2$, τότε ο αριθμός α^ν λέγεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το ν και είναι ίσος με το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλαδή: $\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \ldots \alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$

Ορίζουμε ακόμη:

$\alpha^1 = \alpha$

$\alpha^0 = 1$ με $\alpha \neq 0$

$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$ με $\alpha \neq 0$.

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^\mu \cdot \alpha^\nu = \alpha^{\mu+\nu}$	$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5$
$\alpha^\mu : \alpha^\nu = \alpha^{\mu-\nu}$	$2^3 : 2^{-2} = 2^{3-(-2)} = 2^5$
$(\alpha \cdot \beta)^\nu = \alpha^\nu \beta^\nu$	$(3\psi)^3 = 3^3\psi^3 = 27\psi^3$
$(\frac{\alpha}{\beta})^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$	$(\frac{2}{5})^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$
$(\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-3} = 2^9 = 512$
$(\frac{\alpha}{\beta})^{-\nu} = (\frac{\beta}{\alpha})^\nu$	$(\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Αν σε μία δύναμη η βάση είναι θετική τότε το αποτέλεσμα είναι θετικό.

2. Αν σε μία δύναμη η βάση είναι αρνητική τότε το αποτέλεσμα εξαρτάται από τον εκθέτη.
i) Αν ο εκθέτης είναι άρτιος το αποτέλεσμα είναι θετικό.
ii) Αν ο εκθέτης είναι περιττός το αποτέλεσμα είναι αρνητικό.

3. Δεν ορίζεται η δύναμη με βάση το 0 και εκθέτη αρνητικό ακέραιο ή μηδέν.

4. Ο συμβολισμός $(-\alpha)^{\nu}$ σημαίνει νιοστή δύναμη του $-\alpha$ ενώ ο συμβολισμός $-\alpha^{\nu}$ σημαίνει ο αντίθετος του $-\alpha^{\nu}$.

5. Σε μία αλγεβρική παράσταση η προτεραιότητα των πράξεων είναι:
i) Υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
ii) Πολλαπλασιασμοί και διαιρέσεις.
iii) Προσθέσεις και αφαιρέσεις.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, κάνουμε πρώτα τις πράξεις μέσα σ' αυτές με την ίδια σειρά.

6. Ισχύουν **i)** $1^{\nu} = 1$ για κάθε ακέραιο ν.
ii) $(-1)^{\nu} = 1$ για κάθε άρτιο ακέραιο ν
iv) $(-1)^{\nu} = -1$ για κάθε περιττό ακέραιο ν.

7. Προσοχή το 0^0 δεν ορίζεται.

8. Αν $\alpha^{\nu} = \beta^{\nu}$ τότε δεν ισχύει πάντα $\alpha = \beta$.

9. **i)** Γεωμετρικά η δύναμη α^2 εκφράζει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά α.
ii) Γεωμετρικά η δύναμη α^3 εκφράζει τον όγκο ενός κύβου με ακμή α.

10. Από την ισότητα $\alpha^{x} = \alpha^{\psi}$, $\alpha \neq 0, 1, -1$ προκύπτει ότι $x = \psi$.

1 **Να υπολογίσετε τις δυνάμεις:**

α) $(-0{,}25)^{17} \cdot 8^{11}$ **β)** $(-4)^{60} \cdot (-1{,}25)^{40}$ **γ)** $12^{100} \cdot 1{,}5^{50} \cdot 6^{-150}$

Λύση

α) 1ος τρόπος (προσπαθούμε να έχουμε ίδιους εκθέτες)

$(-0{,}25)^{17} \cdot 8^{11} = -0{,}25^{17} \cdot 8^{11} = -\ 0{,}25^{6} \cdot 0{,}25^{11} \cdot 8^{11} = -\ 0{,}25^{6} \cdot (0{,}25 \cdot 8)^{11} =$
$-0{,}25^{6} \cdot 2^{11} = -0{,}25^{6} \cdot 2^{6} \cdot 2^{5} = -(\ 0{,}25 \cdot 2)^{6} \cdot 2^{5} = -0{,}5^{6} \cdot 2^{5} = -0{,}5 \cdot 0{,}5^{5} \cdot 2^{5} =$
$= -0{,}5 \cdot (0{,}5 \cdot 2)^{5} = -0{,}5 \cdot 1^{5} = -0{,}5 \cdot 1 = -0{,}5.$

2ος τρόπος (προσπαθούμε να έχουμε ίδιες βάσεις)

$$(-0{,}25)^{17} \cdot 8^{11} = -\left(\frac{25}{100}\right)^{17} \cdot 8^{11} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{17} \cdot (2^{3})^{11} = -\left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{17} \cdot 2^{33} = -\frac{1}{2^{34}} \cdot 2^{33} =$$
$$-2^{33-34} = -2^{-1} = -\frac{1}{2} = -\ 0{,}5.$$

β) $(-4)^{60} \cdot (-1{,}25)^{40} = 4^{60} \cdot 1{,}25^{40} = 4^{20} \cdot 4^{40} \cdot 1{,}25^{40} = 4^{20} \cdot (4 \cdot 1{,}25)^{40} = 4^{20} \cdot 5^{40} =$

$4^{20} \cdot 5^{20} \cdot 5^{20} = (4 \cdot 5 \cdot 5)^{20} = 100^{20} = (10^{2})^{20} = 10^{40}$

γ) $$12^{100} \cdot 1{,}5^{50} \cdot 6^{-150} = \frac{12^{100} \cdot 1{,}5^{50}}{6^{150}} = \frac{12^{100} \cdot 1{,}5^{50}}{6^{100} \cdot 6^{50}} = \left(\frac{12}{6}\right)^{100} \cdot \left(\frac{1{,}5}{6}\right)^{50} = 2^{100} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{50} =$$
$$2^{100} \cdot \left(\frac{1}{2^{2}}\right)^{50} = 2^{100} \cdot \frac{1}{2^{100}} = \frac{2^{100}}{2^{100}} = 1.$$

2 **Να βρεθεί η τιμή της παράστασης**

$$A = [(x^{2}\psi^{3})^{-2} \cdot (x\psi^{3})^{4}] : (x^{3} : \psi^{-1})^{-3} \text{ για } x = 2007 \text{ και } \psi = \frac{1}{2007}$$

Λύση

$$A = [(x^{2} \cdot \psi^{3})^{-2} \cdot (x \cdot \psi^{3})^{4}] : (x^{3} : \psi^{-1})^{-3} = (x^{-4} \cdot \psi^{-6} \cdot x^{4} \cdot \psi^{12}) : (x^{-9} : \psi^{3}) = (x^{-4+4} \cdot \psi^{-6+12}) : \frac{x^{-9}}{\psi^{3}} =$$
$$x^{0} \cdot \psi^{6} \cdot \frac{\psi^{3}}{x^{-9}} = \frac{\psi^{6} \cdot \psi^{3}}{x^{-9}} = \psi^{9} \cdot x^{9} = (\psi \cdot x) = \frac{1}{2007} \cdot 2007 = 1\ .$$

3 **Για τις διάφορες τιμές του φυσικού ν να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων**

$\mathbf{A} = (-1)^{\nu} + 1^{\nu}$ $\quad \mathbf{B} = (-1)^{2\nu} + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu}$

Λύση

$\mathbf{A} = (-1)^{\nu} + 1^{\nu} = (-1)^{\nu} + 1$. Διακρίνουμε περιπτώσεις για τον φυσικό ν.

1η περίπτωση: αν ο ν είναι άρτιος τότε : Α = 1 + 1 = 2

2η περίπτωση: αν ο ν είναι περιττός τότε Α = -1 + 1 = 0

$\mathbf{B} = (-1)^{2\nu} + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu} = 1 + (-1)^{\nu+1} + (-1)^{\nu}$.
Διακρίνουμε περιπτώσεις για το ν.

1η περίπτωση: αν ο ν είναι άρτιος, τότε ο ν + 1 είναι περιττός οπότε:
$\mathbf{A} = 1 + (-1) + 1 = 1$.

2η περίπτωση: αν ο ν είναι περιττός, τότε ο ν+1 είναι άρτιος οπότε:
$\mathbf{B} = 1 + 1 + (-1) = 1$

4 **Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:**

$\mathbf{A} = 2^{101} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{100}$ $\quad \mathbf{B} = 27^{9} \cdot 64^{9} - 32^{5} \cdot 6^{27}$

Λύση

$$\mathbf{A} = 2^{101} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{100} = 2^{2} \cdot 2^{99} \cdot 5^{99} + 10^{99} - 2^{99} \cdot 5^{99} \cdot 5 =$$
$$= 4 \cdot (2 \cdot 5)^{99} + 10^{99} - (2 \cdot 5)^{99} \cdot 5 = 4 \cdot 10^{99} + 10^{99} - 5 \cdot 10^{99} =$$
$$= 10^{99}(4 + 1 - 5) = 10^{99} \cdot 0 = 0$$

$$\mathbf{B} = 27^{9} \cdot 64^{9} - 32^{5} \cdot 6^{27} = (3^{3})^{9} \cdot (2^{6})^{9} - (2^{5})^{5} \cdot (2 \cdot 3)^{27} =$$
$$= 3^{27} \cdot 2^{54} - 2^{25} \cdot 2^{27} \cdot 3^{27} = 3^{27} \cdot 2^{54} - 2^{52} \cdot 3^{27} = 3^{27} \cdot 2^{52}(2^{2} - 1) = 3^{28} \cdot 2^{52}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν α είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε $(\alpha - 3)^0 = 1$.
2. Αν $\alpha > 0$ και ν άρτιος τότε $(-\alpha)^\nu = \alpha^\nu$.
3. Ισχύει η ισότητα $3^{33} = (3^3)^3$.
4. Αν ν είναι περιττός ακέραιος τότε $(-1)^\nu + 1 = -1$.
5. Ισχύει $\alpha^{\mu+\nu} = \alpha^\mu + \alpha^\nu$.
6. Ο αριθμός $(-\alpha)^\nu$ όπου $\alpha < 0$ και ν ακέραιος είναι πάντα θετικός.
7. Αν $4^x = (\frac{1}{2})^x$ τότε $x = 0$.
8. Αν $\alpha \neq 0$ τότε: $\alpha^{3\nu} : \alpha^\nu = \alpha^{2\nu}$.
9. Ισχύει $(5+3)^3 = 5^3 + 3^3$.
10. Ισχύει $(4^3)^5 = (4^5)^3$.
11. Ισχύει $-2^4 = -(-2)^4$.
12. Αν $\alpha > 0$ τότε $\alpha^{-\nu} < 0$.
13. Ισχύει $\alpha^5 + \alpha^5 = 2\alpha^{10}$.
14. Ισχύει $\alpha^8 : \alpha^4 = \alpha^2$.
15. Ισχύει $(-4)^5 \cdot (-4)^7 = 4^{12}$.
16. Ισχύει $\alpha^{\mu-\nu} = \frac{1}{\alpha^{\nu-\mu}}$.
17. Οι αριθμοί α^ν και $\alpha^{-\nu}$ είναι αντίστροφοι.
18. Ισχύει $2^\nu = 2^{\nu+1} - 2^\nu$ όπου ν φυσικός.
19. Αν $\alpha^\nu = \beta^\nu$ όπου ν φυσικός αριθμός τότε ισχύει πάντα $\alpha = \beta$.

Β. Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

1. Η δύναμη $(-3)^{-2}$ είναι ίση με:
α. -9, **β.** 9, **γ.** $-\frac{1}{9}$, **δ.** $\frac{1}{9}$

2. Αν $(2^x)^2 = \frac{1}{64}$ τότε η τιμή του x είναι ίση με:
α. 3, **β.** –3, **γ.** 4, **δ.** -6, **ε.** 6

3. Το μισό του 8^{10} είναι:
α. 8^5, **β.** 4^{10}, **γ.** 2^{29}, **δ.** 4^5, **ε.** $0{,}5 \cdot 8^{10}$

4. Αν ο αριθμός $(-6)^\nu$ είναι θετικός. Τότε ο ν είναι:
α. περιττός, **β.** άρτιος, **γ.** οποσδήποτε 0, **δ.** αρνητικός.

5. Η τιμή της παράστασης $[(-3)^0]^5$ είναι:
α. 1, **β.** -1, **γ.** 3^5, **δ.** -15

6. Από την ισότητα $3^\nu = (-3)^\nu$ όπου ν ακέραιος προκύπτει ότι ο ν είναι:
α. άρτιος, **β.** περιττός, **γ.** 0, **δ.** οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

7. Η δύναμη $(\alpha^\alpha)^\alpha$ όπου $\alpha \neq 0$ είναι ίση με:
α. α^{α^2}, **β.** α^3, **γ.** $\alpha^{2\alpha}$

8. Αν ο ν είναι άρτιος τότε η δύναμη $(-1)^\nu$ ισούται με:
α. -1^ν, **β.** $-\nu$, **γ.** 1, **δ.** ν

9. Από την ισότητα $(x-3)^0 = 1$, όπου x πραγματικός προκύπτει ότι:
α. $x = 0$, **β.** $x = 3$, **γ.** $x \neq 3$, **δ.** οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

10. Η παράσταση $3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3$ είναι ίση με:
α. 3^{15}, **β.** $5 \cdot 3^3$, **γ.** 15^3, **δ.** 15^{15}

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1 Να συγκρίνετε με το μηδέν τους παρακάτω αριθμούς:
8^{-3}, -7^{-2}, $(-3)^{-5}$, -4^{4}, $(-20)^{5}$, $(4)^{0}$

2 Να γράψετε με τη μορφή μιας δύναμης τους αριθμούς:
α) $α^4 \cdot α^5$, **β)** $(-α)^3 \cdot α^4$, **γ)** $(-α)^4 : α^2$, **δ)** $α^3 \cdot β^8 : α\text{-}2 \cdot β^3$

ε) $\dfrac{(0{,}5)^{-5} \cdot 8 \cdot (-2)^{-4}}{32 \cdot (\frac{1}{4})^{-2}}$ **στ)** $\dfrac{4^5 \cdot 81^2 \cdot 2 \cdot 3^3}{36^5}$

3 Να γράψετε καθεμιά από τις παρακάτω παραστάσεις ως μία δύναμη:
Α $= 3^{77} + 3^{77} + 3^{77}$ **Β** $= 2^{102} - 2^{101} - 2^{100}$, **Γ** $= 2^{99} - 4^{49}$, **Δ** $= 2^{17} \cdot 3^{18} - 2^{18} \cdot 3^{17}$

4 Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $8^x = 32$, **β)** $3^x \cdot 4^{2x+1} = 192$, **γ)** $8 \cdot 5^{3x-2} = 200$, **δ)** $2 \cdot 3^x = 54$

ε) $(\frac{2}{3})^{-2} \cdot (\frac{3}{2})^X = \frac{81}{4}$, **στ)** $3^{X+2} = 1$

5 Να συγκρίνετε τους παρακάτω αριθμούς:
α) $α = 5^8$ και $β = (5^3)^2$, **β)** $α = 2^8$ και $β = 8^2$, **γ)** $α = 12^{35}$ και $β = 7^{42}$

δ) $α = 2^{15}$ και $β = 32^4$, **ε)** $α = 5^{35}$ και $β = 7^{19} + 48 \cdot 7^{19}$.

6 **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $(x^{-5}) \cdot (x^2)^2 = -\frac{1}{3}$

β) Για την τιμή του x που βρήκατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:
Α $= (x + 2)^{2007} + (x + 3)^{2008} + (x + 4)^{2009}$

7 Αν $x = |-4-(-3)|$ και $ψ = |3-4|$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2^{3X-2} \cdot (2^{Ψ-1})^3}{3^{X+1} \cdot 3^{2Ψ-1}} : \frac{2^{X+1} - 2^{Ψ}}{3^X + 3^{2Ψ-1}}$$

8 Αν ν άρτιος τότε να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{2-(-1)^ν}{4-3(-1)^{ν+2}} - \frac{1+(-1)^{ν+1}}{2007} + \frac{1+4(-1)^{2ν}}{3-2(-1)^{ν+1}}$$

9 Να γραφτεί η παράσταση **Α** $= (3^2)^4 + 3^{11} : 27 + 3^3 : 3^{-5} - 2 \cdot 3^9$ ως δύναμη του 3.

10 Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης:
$\mathbf{A} = 2^{2000} : [(25^{50} : 5^{99} - 3^{51} : 9^{25})^{1999}] + (2^{111})^{18} - 2 \cdot 2^{1997}$
(Εξετάσεις Ρουμανίας 2000)

11 **α)** Να αποδείξετε ότι η παράσταση $2^{\nu+3} + 2 \cdot 2^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του 10

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = 4^{6\nu+2} - 10 \cdot 4^{6\nu} + 12$ είναι πολλαπλάσιο του 6

12 Να υπολογίσετε τίς παραστάσεις:
$\mathbf{A} = (-1)^{2007} + [-5-(-2^2-3)]5 - \{-[-2-(-1^{2006}+1)]\}^4$

$\mathbf{B} = [(-1)^{10}+(-1)^{11}] \cdot (2^4 - 3^2) + 5^{12} : 5^{10}-20$

13 Αν ο ν είναι φυσικός να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:
$\mathbf{A} = (-1)^{2007} + (-1)^{\nu+2} + (1)^{2\nu+1}$

14 Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\mathbf{A} = \dfrac{3^{\nu+2} + 5 \cdot 3^{\nu} - 4 \cdot 3^{\nu+1}}{4 \cdot 3^{\nu+1} + 3^{\nu}}$
είναι ανεξάρτητη του ν.

15 Να βρείτε τον αντίστροφο και τον αντίθετο κάθε μίας από τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \frac{2^{\nu} + 2^{\nu-1}}{2^{\nu+1} - 2^{\nu}}, \quad \mathbf{B} = \frac{7^{\nu+2} - 35 \cdot 7^{\nu-1}}{7^{\nu} \cdot 11}$$