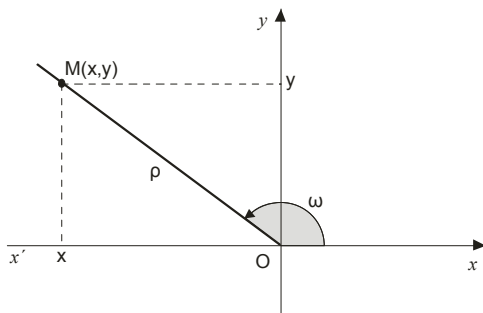


ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ ΜΙΑΣ ΓΩΝΙΑΣ

3.1. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.

Απάντηση:



Για τη γωνία $\widehat{xOM} = \hat{\omega}$, έχουμε

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

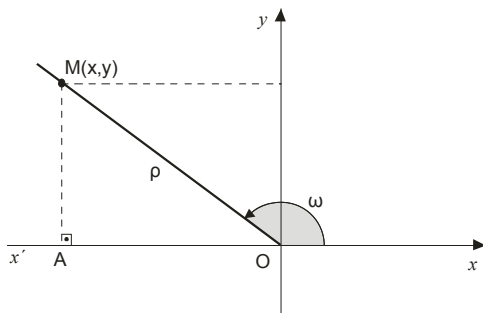
$$\text{Επομένως} \quad \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y \cdot \rho}{x \cdot \rho} = \frac{y}{x} = \epsilon\varphi\omega.$$

$$\text{Δηλαδή,} \quad \boxed{\epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}}.$$

Ο τύπος ισχύει με την προϋπόθεση ότι η γωνία $\hat{\omega}$ είναι τέτοια, ώστε $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$, δηλαδή όταν $\hat{\omega} \neq 90^0$ και $\hat{\omega} \neq 270^0$.

3.2. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Απάντηση:



Έχουμε:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2}$$

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2 = 1$$

$$(\sigma\upsilon\nu\omega)^2 + (\eta\mu\omega)^2 = 1.$$

$$\text{Δηλαδή,} \quad \boxed{\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3. i) Να βρείτε τους αριθμούς:

$$\alpha = \sqrt{13 - \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}} \quad \text{και} \quad \beta = \sqrt{41 - \sqrt{29 - \sqrt{19 - \sqrt{9}}}}$$

ii) Αν η γωνία ω ανήκει στο 2^ο τεταρτημόριο και είναι $\eta\mu\omega = \frac{\alpha}{\beta}$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της

$$\text{παράστασης:} \quad \Pi = \frac{2\eta\mu\omega - \sigma\upsilon\nu^2\omega}{\epsilon\varphi^2\omega}.$$

[Απ. i) $\alpha=3, \beta=6$ ii) $\Pi = \frac{3}{4}$]

3.4. Αν $\eta\mu x = \frac{3}{5}$ και $0^0 < x < 90^0$, να υπολογίσετε:

i) Το $\sigma\upsilon\nu x$ και την $\epsilon\varphi x$.

ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3\eta\mu^2 x + 5\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}{\epsilon\varphi^2 x}.$$

3.5. Αν $\sin x = -\frac{5}{13}$ και $90^\circ \leq x \leq 180^\circ$, να υπολογίσετε:

- i) Το $\eta\mu x$ και την $\epsilon\varphi x$.
- ii) Την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{5\epsilon\varphi x + 3\eta\mu^2 x + \sin x}{2\eta\mu x + 3}$$

3.6. Αν $\epsilon\varphi x = 3$ και $0^\circ < x < 90^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$\Pi = \frac{\eta\mu^2 x - 2\eta\mu x \cdot \sin x}{4\eta\mu^2 x - 3\sin^2 x}$$

[Απ. $\Pi = \frac{1}{11}$]

3.7. Αν $\eta\mu\omega = 3\lambda$ και $\sin\omega = 4\lambda$ με $0 < \lambda < \frac{1}{4}$, να

υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 25\lambda^2 + (5\lambda - 1)^3$$

[Απ. $A=1$]

3.8. Έστω ότι η εξίσωση $x^2 + \eta\mu\alpha \cdot x + \sin^2\alpha = 0$ έχει μοναδική λύση. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α , αν η γωνία ανήκει στο 4° τεταρτημόριο.

[Απ. $\eta\mu\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\epsilon\varphi\alpha = -2$]

3.9. Αν $\eta\mu\varphi = \frac{\kappa^2 - \lambda^2}{\kappa^2 + \lambda^2}$, $\kappa > \lambda > 0$ και $90^\circ < x < 180^\circ$,

να βρείτε:

- α) το $\sin\varphi$
- β) την $\epsilon\varphi\varphi$

[Απ. α) $\sin\varphi = -\frac{2\kappa\lambda}{\kappa^2 + \lambda^2}$ β) $\epsilon\varphi\varphi = \frac{\lambda^2 - \kappa^2}{2\kappa\lambda}$]

3.10. Να αποδείξετε ότι: $\sin^2\omega (1 + \epsilon\varphi^2\omega) = 1$.

3.11. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi\alpha (\sin\alpha - \sin^3\alpha) = \eta\mu^3\alpha$.

3.12. i) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} \frac{2x-y+1}{3} + \frac{4x-3y}{2} = x+2 \\ 2y = 3(x-1) \end{cases}$$

ii) Αν (x,y) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος να αποδείξετε ότι:

$$4(x \cdot \eta\mu\omega + 2006y \cdot \sin\omega)^2 + (2006y \cdot \eta\mu\omega + 2x \cdot \sin\omega)^2 = 4$$

[Απ. i) $(x,y) = (1,0)$]

3.13. Να αποδείξετε ότι: $1 + \epsilon\varphi^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$.

3.14. Να αποδείξετε ότι:

$$(\eta\mu\alpha + \sin\alpha)^2 - (\eta\mu\alpha - \sin\alpha)^2 = 4\eta\mu\alpha \cdot \sin\alpha$$

3.15. Να αποδείξετε ότι:

$$(3\eta\mu\omega + 4\sin\omega)^2 + (4\eta\mu\omega - 3\sin\omega)^2 = 25$$

3.16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha + \epsilon\varphi\alpha}{\epsilon\varphi\alpha} = 1 + \sin\alpha$.

3.17. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu x \cdot \sin x \cdot \epsilon\varphi x + \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x} = 1$.

3.18. Να αποδείξετε ότι: $(1 - \frac{1}{\sin^2\omega})(1 - \frac{1}{\eta\mu^2\omega}) = 1$.

3.19. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha + \sin\alpha}{\eta\mu\alpha - \sin\alpha} = \frac{\epsilon\varphi\alpha + 1}{\epsilon\varphi\alpha - 1}$.

3.20. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\varphi^2\omega - 1}{\epsilon\varphi^2\omega + 1} = \eta\mu^2\omega - \sin^2\omega$.

3.21. Αν $\alpha = 3\eta\mu\omega \cdot \eta\mu\varphi$, $\beta = 3\eta\mu\omega \cdot \sin\varphi$, $\gamma = 3\sin\omega$ να δείξετε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 9$.

3.22. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{1 - \eta\mu\omega} + \frac{1}{1 + \eta\mu\omega} = \frac{2}{\sin^2\omega}$.

3.23. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 + \sin\alpha} + \frac{1}{\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$.

3.24. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{1}{\epsilon\varphi\alpha} = \frac{1}{\eta\mu\alpha}$.

3.25. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sin\alpha} + \frac{1 - \sin\alpha}{\eta\mu\alpha} = \frac{2}{\eta\mu\alpha}$.

3.26. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon\varphi^2\alpha - \eta\mu^2\alpha = \epsilon\varphi^2\alpha \cdot \eta\mu^2\alpha$.

3.27. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4\alpha - \eta\mu^2\alpha = \sin^4\alpha - \sin^2\alpha$.

3.28. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu^4x - \sin^4x = 2\eta\mu^2x - 1$.

3.29. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\text{i) } \frac{\sin^4\omega - \eta\mu^4\omega}{1 - \epsilon\varphi^2\omega} \quad \text{ii) } \frac{2\sin^2\omega - 1}{\sin^4\omega - \eta\mu^4\omega}$$

[Απ. i) $\sin^2\omega$ ii) 1]

3.30. Να αποδείξετε ότι: $1 - \frac{\sin^2\omega}{1 + \eta\mu\omega} = \eta\mu\omega$.

3.31. Να αποδείξετε ότι:

$$(\epsilon\varphi\omega + \frac{\sin\omega}{\eta\mu\omega}) (\frac{1}{\sin\omega} - \sin\omega) (\frac{1}{\eta\mu\omega} - \eta\mu\omega) = 1$$

3.32. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin x}{1 - \epsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu^2 x}{\eta\mu x - \sin x} = \eta\mu x + \sin x$$

3.33. Αν $0^\circ < x < 90^\circ$ και $\sin x = 2\eta\mu x - 1$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x .

[Απ. $\eta\mu x = \frac{4}{5}$, $\sin x = \frac{3}{5}$, $\epsilon\varphi x = \frac{4}{3}$]

3.34. i) Αν $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ να υπολογίστούν τα $\eta\mu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$.

ii) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} (\eta\mu\theta) \cdot x - (\sigma\upsilon\nu\theta) \cdot y = 1 \\ (-\epsilon\phi\theta) \cdot x - y = 1 \end{cases} .$$

[Απ. i) $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$, $\epsilon\phi\theta = -\frac{5}{12}$ ii) $(\frac{5}{2}, \frac{1}{24})$]

3.35. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x , αν είναι $3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x = 5$.

[Απ. $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$, $\epsilon\phi\theta = \frac{3}{4}$]