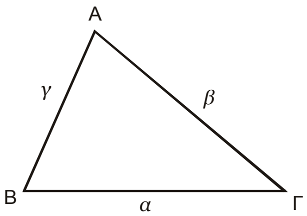
ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΙΣΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

1.1. ***Τι αναφέρει η τριγωνική ιδιότητα;***
Να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τη σχέση.
<u>Απάντηση:</u>
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο. Η ιδιότητα αυτή των πλευρών ενός τριγώνου ονομάζεται **τριγωνική ιδιότητα**.

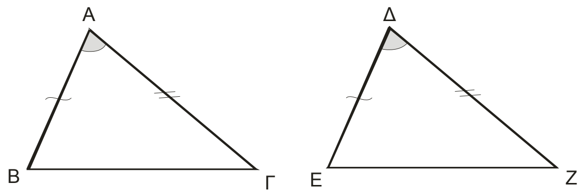


Στο διπλανό τρίγωνα συμβολίζουμε α, β, γ τις πλευρές ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Η σχέση της τριγωνικής ανισότητας είναι:

$$\alpha < \beta + \gamma$$
$$\beta < \alpha + \gamma$$
$$\gamma < \alpha + \beta\ .$$

1.2. ***Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων.***
Για κάθε κριτήριο να κατασκευάσετε ένα σχήμα και να γράψετε τις σχέσεις.
<u>Απάντηση:</u>
Τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων είναι:

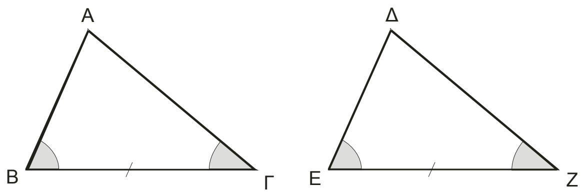
1) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ
$\hat{A} = \hat{\Delta}$

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

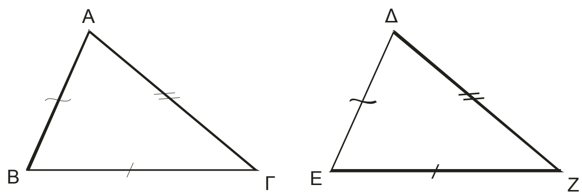
2) Όταν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών γωνίες είναι μια προς μια ίσες, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΒΓ = ΕΖ
$\hat{B} = \hat{E}$
$\hat{\Gamma} = \hat{Z}$

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

3) Όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.



Αν ΑΒ = ΔΕ
ΑΓ = ΔΖ
ΒΓ = ΕΖ

Τότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι ίσα.

1.3. ***Να αναφέρετε τα κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων.***

Απάντηση:

Τα δυο κριτήρια ισότητας των ορθογωνίων τριγώνων είναι:

1) Όταν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μια αντίστοιχη πλευρά και οξεία γωνία ενός άλλου, τότε τα δυο τρίγωνα είναι ίσα.

2) Όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες με δυο αντίστοιχες πλευρές του άλλου, τότε τα δυο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.4. Στις πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε από ένα σημείο Δ, Ε και Ζ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΖ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ.

1.5. Πάνω στις πλευρές ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, παίρνουμε από ένα σημείο Ε, Ζ, Η και Θ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ είναι μικρότερη από την περίμετρο του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

1.6. Στο εσωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι:

$$ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

1.7. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διαγωνίων ενός τετραπλεύρου είναι μεγαλύτερο από το άθροισμα δύο απέναντι πλευρών του.

1.8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

α) $\upsilon_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$.

β) $\upsilon_\alpha + \upsilon_\beta + \upsilon_\gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

1.9. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ και Ε. Αν Κ είναι το σημείο τομής της ΒΕ με την ΓΖ και Δ το σημείο τομής της ΑΚ με την ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

$$ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ > \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

1.10. Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου σχηματίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

1.11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Πάνω στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $ΑΔ = \frac{1}{3}ΑΒ$ και $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

1.12. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε ΒΔ = ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΕΜ είναι ισοσκελές.

1.13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ και παίρνουμε σε αυτές αντίστοιχα τα τμήματα ΒΔ, ΓΕ ώστε ΒΔ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι ΓΔ = ΒΕ.

1.14. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ φέρνουμε τη διάμεσό του ΑΜ. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο Δ πάνω στην ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ισοσκελές.

1.15. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και πάνω στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Κ, Λ, Μ έτσι ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ.

α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΚΜ και ΒΚΛ.

β) Να συγκρίνετε τα τμήματα ΚΜ και ΚΛ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

1.16. Κατασκευάζουμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{Α}$ και πάνω σ' αυτήν παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.

1.17. Δίνεται κύκλος κεντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς τα δύο άκρα της, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $Ο\hat{Γ}Α = Ο\hat{Δ}Β$.

β) Το τρίγωνο ΟΓΔ είναι ισοσκελές.

1.18. Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$. Στις πλευρές της Ox και Oy παίρνουμε τμήματα ΟΑ, ΟΓ και ΟΒ, ΟΔ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΟΑ = ΟΒ, ΟΓ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι:

α) ΒΓ = ΑΔ

β) ΜΓ = ΜΔ

γ) Το τμήμα ΟΜ διχοτομεί τη γωνία $x\hat{O}y$.

1.19. Θεωρούμε ένα σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Από τις κορυφές Β και Γ φέρνουμε καθέτους ΒΔ , ΓΕ στη διάμεσο ΑΜ. Να αποδείξετε ότι ΒΔ = ΓΕ.

1.20. Κατασκευάζουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και παίρνουμε το μέσο του Μ. Φέρνουμε μια ευθεία ε που να διέρχεται από το Μ και να μην είναι κάθετη στο ΑΒ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Α , Β από την ευθεία ε είναι ίσες.

1.21. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κορυφών του Α και Γ από τη διαγώνιο ΒΔ είναι ίσες.

1.22. Κατασκευάζουμε μια γωνία $x\hat{O}y$ και φέρνουμε τη διχοτόμο της $O\delta$. Παίρνουμε ένα σημείο Μ πάνω στην $O\delta$ και φέρνουμε τις καθέτους ΜΑ και ΜΒ πάνω στις πλευρές Ox και Oy της γωνίας. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

β) Το τμήμα ΟΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{M}B$.

γ) Το τμήμα ΟΜ είναι κάθετο στο ΑΒ.

1.23. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι ίσες.

1.24. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και εξωτερικά αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ και ΑΓΖΗ. Να αποδείξετε ότι ΒΗ = ΓΕ.