

ΕΝΟΤΗΤΑ 3.

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1. Να λύσετε τα συστήματα και έπειτα να κάνετε την επαλήθευση.

$$\text{i)} \begin{cases} x=3y+1 \\ 3x-2y=-11 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x-2y=4 \\ x+y=31 \end{cases}$$

[Απ. i) (x, y) = (-5, -2) ii) (x, y) = (22, 9)]

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{2x+2}{3} + y = 3 \\ \frac{x+2}{2} - 1 = \frac{y+2}{3} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} x+3+(y+1)^2 = y^2 \\ 3(x+2y) = 2 \end{cases}$$

[Απ. i) (2, 1) ii) αδύνατο]

2.2. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} x-2y=2 \\ x-7y+13=0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 5x+y=45 \\ 2y-3x=25 \end{cases}$$

[Απ. i) (x, y) = (8, 3) ii) (x, y) = (5, 20)]

2.9. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{2x-y}{3} - \frac{x+y}{6} = -\frac{1}{2} \\ \frac{x}{2} + y = 7 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2x+y+4=0 \\ \frac{3x+y}{3} + \frac{2y-x}{5} = x + \frac{2}{5} \end{cases}$$

[Απ. i) (x, y) = (4, 5) ii) (x, y) = (-2, 0)]

2.3. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x=5(y+1) \end{cases}$

[Απ. (x, y) = (5, 2)]

2.10. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (2\alpha-1)x+(4\beta+1)y=3 \\ (\alpha+1)x+(\beta-2)y=2 \end{cases}$ με αγνώστους τα x, y. Να βρείτε τις τιμές των α, β, ώστε το σύστημα να έχει λύση το ζεύγος (-1, 1).

[Απ. α = -1/2, β = 9/2]

2.4. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2[x-(4-y)]+20=0 \\ x+4y=0 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 2(2x+3y)=3(2x-3y)+10 \\ 4x-3y=4(6y-2x)+3 \end{cases}$$

[Απ. i) x = -8, y = 2 ii) x = 5/2, y = 1]

2.11. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2(x+2y)-3(x-3y)=-83 \\ 2(y-2x)-(x-2y)=-49 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 3x+2y=7 \\ 2(3x+2y)+4(2y+3x)=42 \end{cases}$$

[Απ. i) x = 5, y = -6 ii) αδύνατο]

2.5. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot x + y = -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \cdot x - \frac{2}{3} \cdot y = \frac{19}{2} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} 0,3x - 1,5y + 0,3 = 0 \\ y - 0,3x = -0,2 \end{cases}$$

[Απ. i) (x, y) = (5, -3) ii) (x, y) = (4, 1)]

2.12. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{x-2}{4} + \frac{y-3}{8} = \frac{x}{2} - 1 \\ \frac{4x+1}{4} - \frac{5y-9}{6} = \frac{x}{2} + 1 \end{cases} \quad \text{ii)}$$

[Απ. i) x = 2, y = 3 ii)]

2.6. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{4x-y}{6} = 1 - \frac{x}{4} \\ x+y=7 \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{1}{2}x + 4y = 1 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$$

[Απ. i) x = 2, y = 5 ii) x = -2, y = 1/2]

2.13. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} \frac{3x-y}{2} + \frac{x+y}{5} = x + \frac{y+2}{3} + 1 \\ x - \frac{x+y}{2} - 1 = y - \frac{x+6}{3} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{3x-2y}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{4}{3} \\ 2x-3y + \frac{x+y}{5} = -4 \end{cases}$$

[Απ. i) (6, 4) ii) (2, 3)]

2.7. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i)} \begin{cases} 2x-3y=6 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} \end{cases} \quad \text{ii)} \begin{cases} \frac{3x-2y+1}{2} = \frac{x-3y-2}{3} \\ \frac{x+2y}{5} = \frac{2x+y+1}{3} \end{cases}$$

[Απ. i) (-3, -4) ii) (-1, -2)]

2.14. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 2x-5y = \lambda^2 - 3 \\ 2x-5y = 1 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο.

[Απ. $\lambda=2$ ή $\lambda=-2$]

[Απ. 7]

- 2.15. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ \mu x - \mu y = \mu^2 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του μη μηδενικού αριθμού μ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.
Για την τιμή του μ που θα βρείτε να λύσετε το σύστημα.

[Απ. $\mu=1$]

- 2.16. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 5 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} = 2 \end{cases}$

[Απ. $x=\sqrt{2}$, $y=\sqrt{3}$]

- 2.17. Δίνεται η εξίσωση $5x - 4y = 7$. Να βρείτε μια άλλη εξίσωση που να σχηματίζει με αυτή
α) ένα σύστημα, που να έχει μια λύση.
β) ένα σύστημα, που να είναι αδύνατο.
γ) ένα σύστημα, που να είναι αόριστο.

- 2.18. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} x^2 - 9y^2 = 5 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{7}{12} \\ x + y = 7 \end{cases}$$

[Απ. i) $x=3, y=-\frac{1}{3}$ ii) $(3, 4), (4, 3)$]

- 2.19. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} y - x = 1 \\ x^2 + xy - y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} 2x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$$

[Απ. i) $(-1, 0), (2, 3)$ ii) $(2, 1), (3, -1)$]

- 2.20. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ x^2 - xy + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} x + 3y = 5 \\ 5x - y^2 = 9 \end{cases}$$

[Απ. i) $(1, 2), (\frac{8}{5}, \frac{11}{10})$ ii) $(2, 1), (53, -16)$]

- 2.21. i) Να βρείτε τον β , αν η ευθεία με εξίσωση

$$y = 2x + \frac{\beta}{3} \text{ διέρχεται από το σημείο } A(0, 1).$$

- ii) Για τις τιμές του β που θα βρείτε να λύσετε το

$$\text{σύστημα: } \begin{cases} y = 2x + \frac{\beta}{3} \\ y^2 + xy = 12 \end{cases}$$

[Απ. i) $\beta=3$ ii) $(x, y) = (1, 3), (-\frac{11}{6}, -\frac{8}{3})$]

- 2.22. Να λυθούν τα συστήματα:

$$\text{i) } \begin{cases} \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{y-2} = 3 \\ \frac{3}{2x+1} + \frac{2}{y-2} = 4 \end{cases} \quad \text{ii) } \begin{cases} \frac{4}{x-y} + \frac{12}{x+y} = -1 \\ \frac{1}{x-y} + \frac{1}{2x+2y} = 0 \end{cases}$$

[Απ. i) $(-\frac{1}{4}, 1)$ ii) $(5, -15)$]

- 2.23. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνεται ότι: $AB = x + 4$, $A\Gamma = 4x - y$ και $B\Gamma = y + 2$.
Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.

- 2.24. Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ενός ισοσκελούς τριγώνου, το οποίο έχει περίμετρο 10 cm και η βάση του είναι μεγαλύτερη κατά 1 cm κάθε μιας από τις ίσες πλευρές του.

[Απ. 3cm 4cm]

- 2.25. Ένας φυσικός αριθμός, όταν διαιρείται με το 5 ή το 3 αφήνει υπόλοιπο 2 και ηλίκα που δίνουν άθροισμα 8. Ποιος είναι ο αριθμός;

[Απ. 17]

- 2.26. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$ που διέρχεται από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(4, -1)$.

[Απ. $y = -3x + 11$]

- 2.27. Να βρεθούν τα a, β , ώστε η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$ να αληθεύει για $x = 3$ και $x = -7$.

[Απ. $\alpha=4, \beta=-21$]

- 2.28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + x + \beta$. Αν ισχύει $f(1) = 2$ και ο 2 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ να βρείτε τα a, β καθώς και το είδος του ακροτάτου που παρουσιάζει η συνάρτηση.

[Απ. $\alpha=-1, \beta=2$, Μέγιστο]

- 2.29. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $y = ax + \beta$ αν αυτή διέρχεται από τα σημεία $(\alpha, -1)$ και $(1, 3\alpha)$.

[Απ. $y = -x - 2$]

- 2.30. Αν ο Μέγας Αλέξανδρος πέθενε 9 χρόνια ενωρίτερα, θα βασιλεύε κατά το της ζωής του. Αν όμως πέθενε 9 χρόνια αργότερα, θα βασιλεύε κατά το μισό της ζωής του. Σε ποιά ηλικία πέθανε και επί πόσο χρόνο βασιλέυσε;

[Απ. Πέθανε 33 χρόνων και βασιλέυσε 12 χρόνια]

- 2.31. Σε ένα ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 3x + 6$, $B\Gamma = x^2$, $\Gamma\Delta = 5y + 4$ και $\Delta A = y$ όπου x θετικός ακέραιος. Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου.

[Απ. 20]

- 2.32. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή το A έχει $AB = x^2$, $A\Gamma = 5 - y^2$ και τα ύψη του από το B, Γ είναι $B\Delta = x + y$ και $\Gamma E = 1$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τις ίσες πλευρές του τριγώνου.

[Απ. $AB=A\Gamma=1$ ή $AB=A\Gamma=4$]

- 2.33. Αν η εξίσωση $x^2 + ax + \beta = 0$ έχει διακρίνουσα 16 και κοινή λύση με την εξίσωση

$$3 + \frac{x}{x-1} = \frac{2\alpha+1}{x-1}, \text{ να βρείτε τα } \alpha, \beta.$$

[Απ. $\alpha=1, \beta=-\frac{15}{4}$ ή $\alpha=-3, \beta=-\frac{7}{4}$]

- 2.34. Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 9. Αν ο αριθμός αυξηθεί κατά 27 προκύπτει διψήφιος αριθμός με εναλλαγή των ψηφίων του αρχικού αριθμού. Ποιος είναι ο αριθμός αυτός;

[Απ. 36]