

ΕΝΟΤΗΤΑ 5.**ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ - ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΜΕ ΕΝΑΝ ΑΓΝΩΣΤΟ**

5.1. Πως συγκρίνουμε δύο αριθμούς a και β ;

Απάντηση:

Για να συγκρίνουμε δύο αριθμούς a και β , βρίσκουμε τη διαφορά τους $a - \beta$ και:

- Αν $a - \beta > 0$ τότε $a > \beta$
- Αν $a - \beta < 0$ τότε $a < \beta$
- Αν $a - \beta = 0$ τότε $a = \beta$

5.2. Να εξηγήσετε ότι αν και στα δύο μέλη μιας ανισότητας προσθέσουμε τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ τότε $a + \gamma > \beta + \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $(a + \gamma) - (\beta + \gamma) = a + \gamma - \beta - \gamma = a - \beta > 0$, αφού $a > \beta$.

Άρα $a + \gamma > \beta + \gamma$.

5.3. Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με θετικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot (a - \beta) > 0$, αφού $\gamma > 0$ και $a - \beta > 0$.

Άρα $a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$.

5.4. Να εξηγήσετε ότι αν πολλαπλασιάσουμε τα μέλη μιας ανισότητας με αρνητικό αριθμό, τότε προκύπτει ανισότητα αντίθετης φοράς. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

Απάντηση:

Έχουμε: $a \cdot \gamma - \beta \cdot \gamma = \gamma \cdot (a - \beta) < 0$, αφού $\gamma < 0$ και $a - \beta > 0$.

Άρα $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

5.5. Να εξηγήσετε ότι αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ανισότητες της ίδιας φοράς, προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $a + \gamma > \beta + \delta$.

Απάντηση:

Έχουμε: $(a + \gamma) - (\beta + \delta) = a + \gamma - \beta - \delta = (a - \beta) + (\gamma - \delta) > 0$, αφού $a - \beta > 0$ και $\gamma - \delta > 0$.

Άρα $a + \gamma > \beta + \delta$.

Βασικές εφαρμογές

5.6. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε $a > \gamma$. (Μεταβατική ιδιότητα)

Απάντηση:

Επειδή $a > \beta$ τότε $a - \beta > 0$ (1). Όμοια, επειδή $\beta > \gamma$ τότε $\beta - \gamma > 0$ (2).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (2), οπότε έχουμε:

$$\begin{aligned} a - \beta + \beta - \gamma &> 0 \\ a - \gamma &> 0 \\ a &> \gamma. \end{aligned}$$

5.7. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ τότε $-a < -\beta$.

Απάντηση:

Έχουμε διαδοχικά:

$$a > \beta$$

$$(-1) \cdot a < (-1) \cdot \beta$$

$$-a < -\beta.$$

5.8. Να αποδείξετε ότι αν $a > \beta$ και a, β ομόσημοι αριθμοί, τότε $\frac{1}{a} < \frac{1}{\beta}$.

Απάντηση:

Αφού οι αριθμοί είναι ομόσημοι, τότε $ab > 0$ οπότε και $\frac{1}{ab} > 0$.

Έχουμε διαδοχικά:

$$a > \beta$$

$$\frac{1}{ab} \cdot a > \frac{1}{ab} \cdot \beta$$

$$\frac{1}{b} > \frac{1}{a}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5.9. Αν $x > y$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$\frac{3}{4}x - 5z \quad \text{και} \quad \frac{3}{4}y - 5z.$$

5.10. Αν $\kappa > \lambda$, να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$8,3\mu - 6\kappa \quad \text{και} \quad 8,3\mu - 6\lambda.$$

5.11. Αν $\beta > 0$ να δείξετε ότι: $a + \beta > a - \beta$.

5.12. Αν $x < z$ και $0 < y < \omega$ να δικαιολογήσετε ότι:

$$x - \frac{1}{y} < z - \frac{1}{\omega}.$$

5.13. Αν $x > 3$ να συγκρίνετε τους αριθμούς

$$A = \sqrt{(x-3)^2} \quad \text{και} \quad B = 2x.$$

[Απ. $A < B$]

5.14. Αν είναι $2a < \beta$, να αποδείξετε ότι:

$$a < \frac{a+\beta}{3} < \frac{\beta}{2}.$$

5.15. Αν $-1 < x < 3$ και $2 < y < 3$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι τιμές των παραστάσεων:

i) $A = 3x + 2y - 1$

ii) $B = 4x - 2y + 5$

[Απ. i) $0 < A < 14$ ii) $-5 < B < 13$]

5.16. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{1}{2} \cdot x + 2 - \frac{3x+1}{3} > x \quad \text{και} \quad \frac{2(x-3)}{3} - x < 0.$$

[Απ. $-6 < x < \frac{10}{9}$]