

ΕΝΟΤΗΤΑ 4.

ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1. Ποια εξίσωση ονομάζουμε κλασματική;

Απάντηση:

Μια εξίσωση που περιέχει άγνωστο στον παρονομαστή, λέγεται κλασματική εξίσωση.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{x}{x^2-4}$$

$$\beta) \frac{2}{x^2+2x} = \frac{-1}{x^2+5x+6}$$

$$\gamma) \frac{13}{x+1} - \frac{1}{1-x} = \frac{5x-3}{x^2-1}$$

[Απ. α) 3/2 β) αδύνατη γ) αδύνατη]

$$\alpha) \frac{2x}{x+2} + \frac{x+2}{2x} = 2$$

$$\beta) \frac{x-1}{x} + \frac{x}{x-2} - \frac{1}{x^2-2x} = 0$$

$$\gamma) \frac{2x-3}{x} - \frac{5x-3}{x^2} = \frac{2x^2+x-8}{x^3} + 2$$

$$\delta) \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+1} = \frac{3}{x^2-x-2}$$

[Απ. α) 2 β) 1, $-\frac{1}{2}$ γ) 1, -0,8 δ) αδύνατη]

4.3. Να εξετάσετε αν έχουν τις ίδιες λύσεις οι εξισώ-

$$\text{σεις: } \frac{8}{x-10} = \frac{x}{10-x} \quad \text{και} \quad \frac{x-10}{8} = \frac{10-x}{x}$$

[Απ. όχι]

4.4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} = \frac{4-x}{x^2+2x}$$

$$\beta) \frac{5}{x+3} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x+1}{x^2+5x+6}$$

$$\gamma) \frac{x-2}{x} = \frac{x^2+4}{x^2-2x}$$

$$\delta) \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-2}{x+3} = \frac{2(x^2+6)}{x^2-9}$$

[Απ. α) 3 β) αδύνατη γ) αδύνατη δ) Όλοι εκτός των -3, 3]

4.5. Δίνονται οι κλασματικές παραστάσεις

$$A = \frac{2x}{x^2+2x}, \quad B = \frac{3}{2x-4} \quad \text{και} \quad \Gamma = \frac{x-14}{2(x^2-4)}.$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.

β) Να λυθεί η εξίσωση $A - B = \Gamma$.

[Απ. α) Η Α όταν $x \neq 0$ και -2 . Η Β όταν $x \neq 2$, η Γ όταν $x \neq \pm 2$ β) Όλοι οι αριθμοί εκτός των $0, -2, 2$]

4.6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

4.7. Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{4}{x+1} - \frac{4x-3}{x^2-1} = 2$$

$$\beta) 1 - \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} = \frac{2x}{x^2-4}$$

$$\gamma) \frac{12}{3x-2} - \frac{8}{3x+2} = \frac{2-33x}{4-9x^2}$$

[Απ. α) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) 0 γ) 2]

4.8. Το άθροισμα των κλασμάτων $\frac{2}{x^2+2x}$ και $\frac{3}{2x+4}$

με ποιόν αριθμό πρέπει να είναι ίσο, ώστε η εξίσωση που θα προκύψει να έχει λύση $x = 1$;

Ποια είναι η άλλη λύση της εξίσωσης;

[Απ. $\frac{7}{6}$, η άλλη λύση είναι $-\frac{12}{7}$]

4.9. Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{x+\frac{2x}{x-2}}{1+\frac{4}{x^2-4}}, \quad B = \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^3}{x^3-x}.$$

α) Να μετασχηματιστούν οι Α και Β στην πιο απλή τους μορφή και να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ορίζονται.

β) Να λύσετε η εξίσωση $\frac{2}{x} \cdot A - (x+1) \cdot B = 0$.

[Απ. α) Η Α όταν $x \neq 0, 2$ και -2 . Η Β όταν $x \neq 0, 1$
και -1 β) 4]

4.10. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση:

$$x^2 - \frac{\lambda^2+1}{\lambda-1} \cdot x + 2\lambda + 2 = 0$$

έχει ρίζα τον αριθμό -1 .

[Απ. $-1, \frac{2}{3}$]

4.11. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-2}{x-1} = \frac{1}{x^2-3x+2}$

β) $\frac{x-1}{x-3} + 1 = \frac{x^2-3x+4}{x^2-5x+6}$

γ) $\frac{x-1}{x+3} - \frac{x-2}{x-3} = \frac{x^2+3}{x^2-9}$

[Απ. α) αδύνατη β) 1, 4 γ) 1, -6]

4.12. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{5x-4}{x^2+5x+6} - \frac{10x+1}{3x^2-27} = \frac{5}{3x-9}$

β) $\frac{4}{x^2-x-2} + \frac{x+5}{2x+2} = \frac{2x}{3x-6}$

γ) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{4}{x^2+2x-3}$

δ) $\frac{3x^2}{x^2-4} - \frac{x-1}{x^2+2x} = \frac{x+2}{x-2} + 2$

[Απ. α) $\frac{4}{103}$ β) 3 γ) αδύνατη δ) 1, $\frac{2}{5}$]

4.13. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α) $\frac{2x}{x+1} + \frac{x}{1-x} + 1 = \frac{3x^2-5}{x^2-1}$

β) $\frac{2x+1}{x^2+3x} + \frac{4x}{x^2-9} = \frac{4}{3+x} - \frac{2}{3-x}$

γ) $\frac{7-x^2}{x^2-1} + \frac{3}{x+1} = \frac{2}{x-1}$

δ) $\frac{x-2}{x} + \frac{4}{x-2} = \frac{8}{x^2-2x}$

[Απ. α) -4 β) αδύνατη γ) 2 δ) -1]

4.14. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\frac{3x^2-1}{x-1} - \frac{2}{x^2-x} = \frac{x^2-3x+2}{x}$

ii)

[Απ. i) -3 ii)]