

ΕΝΟΤΗΤΑ 2.**ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2^ο ΒΑΘΜΟΥ**

2.1. Να αποδείξετε τον τύπο που δίνει τις λύσεις μιας εξίσωσης 2^ο βαθμού.

Απάντηση:

Μια δευτεροβάθμια εξίσωση έχει τη γενική μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$.

Έχουμε διαδοχικά

$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$

$$4a \cdot ax^2 + 4a \cdot bx + 4a \cdot \gamma = 0$$

[πολλαπλασιάζουμε όλους τους όρους με $4a$]

$$4a^2x^2 + 4abx = -4a\gamma$$

[μεταφέρουμε το σταθερό όρο στο 2^ο μέλος]

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta = -4a\gamma$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot \beta + \beta^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

[στο 1^ο μέλος προσθέτουμε το β^2 για να γίνει συμπλήρωση τετραγώνου]

$$(2ax + \beta)^2 = \beta^2 - 4a\gamma$$

Αν συμβολίσουμε την παράσταση $\beta^2 - 4a\gamma$ με Δ (διακρίνουσα) τότε η εξίσωση γράφεται:

$(2ax + \beta)^2 = \Delta$ και διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $\Delta > 0$ τότε έχουμε:

$$2ax + \beta = \pm \Delta$$

$$2ax = -\beta \pm \Delta$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Αν $\Delta = 0$ τότε έχουμε:

$$2ax + \beta = 0$$

$$2ax = -\beta$$

$$x = -\frac{\beta}{2a}$$

- Αν $\Delta < 0$ τότε η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη).

2.1.1. Συμπέρασμα:

Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$

- Αν $\Delta > 0$ έχει δύο άνισες λύσεις τις $x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Αν $\Delta = 0$ έχει μία διπλή λύση την $x = -\frac{\beta}{2a}$
- Αν $\Delta < 0$ δεν έχει λύση (αδύνατη).

[Απ. i) Η Κ όταν $x \neq \pm \frac{1}{2}$, η Λ όταν $x \neq 0$ και -1

iii) $x = \frac{1}{4}$]

2.18. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x^3 - x^2 - 4x + 4 \quad \text{και} \quad B = (x-3)^2 - 4.$$

i) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{A}{B}$ και να βρείτε τις τιμές που μπορεί να παίρνει το x ώστε αυτό ορίζεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = -12$.

[Απ. i) $x \neq \pm 1$ και 5 , $\frac{A}{B} = \frac{(x-2)(x+2)}{x-5}$ ii) $x = -16, x = 4$]

2.19. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x+1)^3 - 3(x-1)^2 - 2(x-1)(x+1) = (x-1)^3 + 8$$

[Απ. $-7, 1$]

2.20. Να λύσετε την επόμενη εξίσωση με άγνωστο το x .

$$(x-\alpha)^2 + (x+\alpha)^2 = (x-\alpha)(x+\alpha) + 4\alpha x.$$

[Απ. $\alpha, 3\alpha$]

2.21. Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x^2 - 4)(x - 1) = (x^2 - 1)(x - 2)$$

[Απ. $1, 2$]

2.22. Για τον θετικό αριθμό α ισχύει η ισότητα:

$$\frac{2}{\alpha^2} + \frac{3}{\alpha} = 2.$$

i) Να βρείτε τον α .

ii) Για την τιμή του α που θα βρείτε, να λύσετε την εξίσωση: $\alpha^{x-x^2} = \frac{1}{4}$.

[Απ. i) $\alpha = 2$ ii) $-1, 2$]

2.23. Να λυθεί η εξίσωση: $5^{(x^2+3x+1)^2} = 5$.

[Απ. $-3, -2, -1, 0$]

2.24. i) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = x^3 - 3x + 2 \quad \text{και} \quad B = x^5 - x^3 - x^2 + 1.$$

ii) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{B}{x+1} = A$.

[Απ. i) $A = (x-1)^2(x+2)$, $B = (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$ ii) $x = 1$]