

ΕΝΟΤΗΤΑ 10.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΡΗΤΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Πολλαπλασιασμός – Διάρθρωση ρητών παραστάσεων

10.1. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3x+2}{5x^2} \cdot \frac{2x}{9x^2-4} \cdot \frac{3x-2}{4}$ ii) $\frac{x^2-1}{\alpha+\beta} : \frac{x+1}{\alpha^2-\beta^2}$

10.2. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{\alpha^2-3}{6\alpha\beta} \cdot \frac{12\beta}{5\alpha^4-15\alpha^2}$ ii) $\frac{\alpha^2-16}{\alpha^2-8\alpha+16} : \frac{3\alpha+12}{3\alpha-9}$
 iii) $\frac{3\kappa^2-6\kappa}{1-2\kappa+\kappa^2} : \frac{12-3\kappa^2}{2\kappa^2+2\kappa-4}$

[Απ. i) $\frac{2}{5\alpha^2}$ ii) $\frac{\alpha-3}{\alpha-4}$ iii) $\frac{2\kappa}{1-\kappa}$]

10.3. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$A = \frac{x^2y^2-y^4}{x^3-y^3} : \frac{xy^2+y^3}{x^2+xy+y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. A=1]

10.4. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$\frac{8x^3}{x^3-y^3} : \frac{4x^2y}{x^2+xy+y^2} : \frac{2x}{xy-y^2}$ είναι σταθερή.

[Απ. 1]

10.5. Δίνεται το κλάσμα $A = \frac{x^3-x^2-4}{x^2-5x+6}$

- i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα;
- ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα.

10.6. Να δείξετε ότι:

$\frac{\alpha^2+2\alpha\sqrt{2}+2}{5+4\alpha} : \frac{\alpha^2-2}{16\alpha^2+25+40\alpha} = \frac{(4\alpha+5)(\alpha+\sqrt{2})}{\alpha-\sqrt{2}}$.

Πρόσθεση – Αφαίρεση ρητών παραστάσεων

10.7. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

i) $\frac{3}{5} - \frac{5+9\alpha}{15\alpha}$ ii) $\frac{\beta+4}{4\beta} - \frac{1}{\beta}$

[Απ. i) $-\frac{1}{3\alpha}$ ii) $\frac{1}{4}$]

10.8. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1}$

ii) $\frac{2}{x-y} + \frac{4y}{y^2-x^2}$

iii) $\frac{1}{\alpha-2} + \frac{1}{\alpha+2} - \frac{4}{\alpha^2-4}$

iv) $\frac{1}{\alpha+3} + \frac{1}{\alpha-3} - \frac{6}{\alpha^2-9}$

v) $\frac{x-\alpha}{x-\beta} + \frac{x-\beta}{x-\alpha} - \frac{(\alpha-\beta)^2}{(x-\alpha)(x-\beta)}$

[Απ. i) $\frac{3}{x+1}$ ii) $\frac{2}{x+y}$ iii) $\frac{2}{\alpha+2}$ iv) $\frac{2}{\alpha+3}$ v) 2]

10.9. Αν οι αριθμοί x, y, z είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$\frac{1}{(x-y)(x-z)} + \frac{1}{(y-z)(y-x)} + \frac{1}{(z-x)(z-y)} = 0$.

10.10. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{x+y}{x-y} - \frac{4xy}{x^2-y^2}$

ii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta} + \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha^2-\beta^2}$

iii) $\frac{\alpha^2}{\alpha\beta+\beta^2} - \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\alpha\beta}$

iv) $\frac{\alpha^2}{xy} + \frac{(\alpha+x)^2}{x^2-xy} - \frac{(\alpha+y)^2}{xy-y^2}$

v) $\frac{1-\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha-3}{\alpha+2} - \frac{4}{4-\alpha^2}$

[Απ. i) $\frac{x-y}{x+y}$ ii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iii) $-\frac{\beta}{\alpha}$ iv) 1 v) $-\frac{2\alpha}{\alpha+2}$]

10.11. Να γίνουν οι πράξεις:

i) $\frac{3}{2\alpha+2} - \frac{2}{3\alpha-3} + \frac{5\alpha+3}{6\alpha^2-6}$

ii) $\frac{1}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{1}{\alpha^2+\alpha\beta} - \frac{1}{2\alpha^2-2\alpha\beta}$

iii) $\frac{2\beta}{\alpha-2\beta} + \frac{\alpha}{2\beta+\alpha} - \frac{4\alpha\beta}{\alpha^2-4\beta^2}$

$$\text{iv)} \frac{1}{x^2-3x+2} + \frac{1}{x^2+x-2} + \frac{1}{x^2-4}$$

$$\text{v)} \frac{2x-1}{x^2-x-2} - \frac{2x+1}{x^2+x-6} + \frac{2x+4}{x^2-4x+4}$$

10.12. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i)} \frac{6\alpha\beta}{9\alpha^2-\beta^2} + \frac{3\alpha}{3\alpha+\beta} + \frac{\beta}{3\alpha-\beta}$$

$$\text{ii)} \frac{x}{x-2} + \frac{x}{3x+3} - \frac{x^2}{x^2-x-2}$$

$$\text{iii)} \frac{\kappa}{3-\kappa} - \frac{\kappa}{1+\kappa} + \frac{4}{\kappa^2-2\kappa-3}$$

$$[\text{Απ. i)} \frac{3\alpha+\beta}{3\alpha-\beta} \text{ ii)} \frac{x}{3(x-2)} \text{ iii)} \frac{2(\kappa-2)}{3-\kappa}]$$

10.13. Δίνεται η παράσταση $A = 1 - \frac{6x}{x^2-9} + \frac{3}{x-3}$.

- i) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;
 ii) Να εκτελέσετε τις πράξεις που σημειώνονται στην παράσταση.

$$[\text{Απ. i)} x \neq -3 \text{ και } 3 \text{ ii)} A = \frac{x}{x+3}]$$

10.14. Δίνεται η παράσταση

$$\Pi = \frac{x^2-x-6}{x^2-9} + \frac{2x+1}{x} - \frac{x^2+x-3}{x^2+3x}$$

- α) Για ποιες τιμές του x έχει έννοια η παράσταση;
 β) Να γράψετε την παράσταση σε απλούστερη μορφή, αφού εκτελέσετε τις πράξεις.

$$[\text{Απ. α)} x \neq 0, -3 \text{ και } 3 \text{ β)} \Pi = \frac{2(x+1)}{x}]$$

10.15. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i)} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) \cdot \frac{x^2 y^2}{x^2 - y^2}$$

$$\text{ii)} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) : \left(\frac{1}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\right)$$

$$\text{iii)} \left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} + \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\alpha\beta} + 1\right) \cdot \frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$$\text{iv)} \left(\alpha - \frac{4y^2}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta - \frac{4x^2}{\beta}\right) : \left(1 + \frac{2x}{\beta} + \frac{2y}{\alpha} + \frac{4xy}{\alpha\beta}\right)$$

10.16. Να δείξετε ότι η παράσταση:

$$\frac{4\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} \text{ είναι σταθερή.}$$

10.17. Να εκτελεστούν οι πράξεις στην παράσταση:

$$\left(\frac{1}{x^2+x-6} - \frac{1}{4-x^2} - \frac{2}{x^2+2x}\right) : \frac{x+4}{x^3-4x}$$

$$[\text{Απ. } \frac{3}{x+3}]$$

10.18. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i)} \frac{1-x}{1+\frac{1}{x}} \quad \text{ii)} \frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$$

10.19. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i)} \frac{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}-2}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}}$$

$$\text{ii)} \frac{\alpha - \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha\beta}}{1 - \frac{\alpha^2+\alpha\beta}{1+\alpha\beta}}$$

$$[\text{Απ. i)} \beta-\alpha \text{ ii)} -\beta]$$

10.20. Να εκτελεστούν οι πράξεις:

$$\text{i)} \frac{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}-1}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}+1}$$

$$\text{ii)} \frac{\frac{\alpha-\beta}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha+\beta}}{\alpha-\beta + \frac{\beta^2}{\alpha+\beta}}$$

$$[\text{Απ. i)} \frac{\beta}{\alpha} \text{ ii)} \frac{1}{\beta}]$$

10.21. Να γίνουν οι πράξεις:

$$\text{i)} \frac{\frac{a}{1+a} + \frac{1-a}{a}}{\frac{a}{1+a} - \frac{1-a}{a}}$$

$$\text{ii)} \frac{3}{1+\frac{a}{\beta+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\beta}{\alpha+\gamma}} + \frac{3}{1+\frac{\gamma}{\alpha+\beta}}$$

$$[\text{Απ. i)} \frac{1}{2\alpha^2-1} \text{ ii)} 6]$$

10.22. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} - \alpha\right) \cdot \frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^3+\beta^3} : \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$[\text{Απ. } \alpha]$$

10.23. Αν $\alpha = \frac{1}{1+x}$, $\beta = \frac{1}{1-x}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Gamma = \frac{\alpha+\beta x}{\beta-\alpha x}$$

10.24. Αν υποθέσουμε ότι: $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$, $x = \frac{\alpha}{\beta+\gamma}$,

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\gamma} \text{ και } z = \frac{\gamma}{\alpha+\beta}, \text{ να αποδείξετε ότι:}$$

$$y = \frac{2xz}{x+z}.$$

10.25. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{2}{v(v+1)(v+2)} = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right) - \left(\frac{1}{v+1} - \frac{1}{v+2}\right)$$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{1999 \cdot 2000 \cdot 2001}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4000} + \frac{1}{4002}$$

10.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση:

$$\left(\frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} + 2\alpha}{\frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta} - 2\alpha} - \frac{2\beta + \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}}{2\beta - \frac{4\alpha\beta}{\alpha+\beta}} \right) : \frac{\frac{4\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2}}{\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta} - \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

είναι σταθερή.

[Απ. 2]

10.27. Αν οι αριθμοί x, y, ω είναι διαφορετικοί ανά δύο, να δείξετε ότι:

$$\frac{x^2}{(x-y)(x-\omega)} + \frac{y^2}{(y-\omega)(y-x)} + \frac{\omega^2}{(\omega-x)(\omega-y)} = 1.$$