

## ΕΝΟΤΗΤΑ 6.

## ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

## 6.1. Τι ονομάζουμε παραγοντοποίηση;

Απάντηση:

Η διαδικασία να μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο, λέγεται **παραγοντοποίηση**.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κοινός παράγοντας

6.2. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α)  $2\alpha\beta - 4\alpha\gamma$   
 β)  $6x^3 + 3x^2$   
 γ)  $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$   
 δ)  $15\alpha^2\beta - 25\alpha\beta\gamma + 30\alpha\beta^2\gamma$

6.3. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α)  $\alpha(x-1) - x + 1$   
 β)  $\kappa(\alpha-2) + 6 - 3\alpha$   
 γ)  $\alpha(2x+3y) - 7\beta(2x+3y) - (3y+2x)$

6.4. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

- α)  $(\alpha-\beta)^3 + (\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta) - 2\beta(\alpha^2+\beta^2)$   
 β)  $(5\alpha-2\beta)(4x-3y) + (3y-4x)\alpha$

6.5. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός:

$$3^{n+3} - 3^{n+2} + 3^n$$

είναι πολλαπλάσιο του 19.

Ομαδοποίηση

6.6. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

- α)  $\alpha x + 2\alpha y + 3x + 6y$   
 β)  $5y - 5\omega - \lambda\omega + \lambda y$   
 γ)  $4\alpha y - 2\beta y + 2\alpha\omega - \beta\omega$   
 δ)  $15x\alpha + 6x\beta - 20y\alpha - 8y\beta$   
 ε)  $xy - 2x + 3y^2 - 6y$   
 στ)  $x^3 + x^2 + x + 1$   
 ζ)  $\alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$

6.7. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α)  $\alpha + \alpha\beta - \beta - 1$   
 β)  $x^2 + xy - x - y$   
 γ)  $3\alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 10$   
 δ)  $\alpha^3 - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta^3$   
 ε)  $8xy^3 - 24y^2 - 7\alpha xy + 21\alpha$

στ)  $2x^2 + x - 2xy - y$

ζ)  $\alpha\beta x - \alpha\beta y - \alpha\gamma x + \alpha\gamma y$

η)  $x^3 - 5x^2 + 3x - 15$

6.8. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α)  $x^2 + (5-y)x - 5y$   
 β)  $\alpha(\alpha-\gamma) - \beta(\beta-\gamma)$   
 γ)  $x(x-3\beta) + y(\alpha-x) - \alpha(x-3\beta)$   
 δ)  $xy(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta(x^2+y^2)$   
 ε)  $\kappa\lambda(\mu^2-\nu^2) + \mu\nu(\kappa^2-\lambda^2)$

6.9. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α)  $(\alpha+\beta)(\lambda+\mu) - \gamma\lambda - \gamma\mu$   
 β)  $\kappa x - 2\kappa y - \lambda x + 2\lambda y + \mu x - 2\mu y$   
 γ)  $\alpha x - \beta x + \beta y + \gamma y - \gamma x - \alpha y$   
 δ)  $\alpha^2\beta - \alpha^2 + \alpha + \beta - \alpha\beta - 1$   
 ε)  $x^2y + xy\omega + xy\phi + y\phi\omega + x^2 - \omega^2$

6.10. Οι αριθμοί  $x, y$  είναι μη μηδενικοί και διάφοροι

μεταξύ τους. Αν  $\frac{x^2+1}{y^2+1} = \frac{x}{y}$  τότε να δείξετε ότι οι

$x, y$  είναι αντίστροφοι.

Διαφορά τετραγώνων

6.11. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

- α)  $81\alpha^2 - 49\beta^2$   
 β)  $3xy^3 - 27x^3y$   
 γ)  $45x^2y^4 - 80\omega^2$   
 δ)  $20\kappa^2 - 15$   
 ε)  $\frac{x^2y^2}{9} - \frac{1}{4}$   
 στ)  $1 - 4x^2$   
 ζ)  $1 - x^8$   
 η)  $16\alpha^6 - 49\beta^8$

6.12. Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

α)  $1001^2 - 1$       β)  $\frac{1540^2 - 463^2}{1077}$   
 γ)  $\frac{62,31^2 - 37,69^2}{24,62}$       δ)  $\frac{225,12^2 - 72,12^2}{297,24}$   
 ε)  $\frac{2004^2 - 1834^2}{1924^2 - 1914^2}$

6.13. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α)  $a^2b - a^2 + a + b - ab - 1$   
 β)  $81x^4 - 16y^4$   
 γ)  $x^8 - 1$   
 δ)  $27x - 3x^3$   
 ε)  $20x - 5x^3$

6.14. Να κάνετε τις παραγοντοποιήσεις:

α)  $a^3 - 5a^2 - 4a + 20$   
 β)  $2x^2y - 18y + 3x^2 - 27$   
 γ)  $a^2x^2 - 4a^2 - x^2 + 4$   
 δ)  $a^5 - 1 + a^4 - a$   
 ε)  $ax^2 + \beta x^2 - ay^2 - \beta y^2$   
 στ)  $ax^3 - a^3x(y+z)^2$   
 ζ)  $9a^2x^2 - 4a^2 - 9\beta^2x^2 + 4\beta^2$

6.15. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

i)  $(5x-6)^2 - 9$   
 ii)  $(\mu-3\nu)^2 - 16\nu^2$   
 iii)  $(3\alpha-2\beta)^2 - (3\beta-2\alpha)^2$   
 iv)  $(x-5y)^2 - 9(x+2y)^2$   
 v)  $9(\alpha-2\beta)^2 - 16(\alpha+2\beta)^2$   
 vi)  $x^3 - x(y-z)^2$

6.16. Αν ο  $x$  είναι φυσικός αριθμός, τότε η παράσταση  $(x^2+3x+1)^2 - 1$  είναι γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών.

6.17. Να γίνουν οι παραγοντοποιήσεις:

α)  $(4x^2-3x-18)^2 - (4x^2+3x)^2$   
 β)  $5(4-x^2) - (x-2)^2$   
 γ)  $(5-3x)(x+4) + (3x-5)(2x-3) + 9x^2 - 25$

6.18. Αν ο  $\kappa$  είναι ακέραιος τότε δείξτε ότι ο

$\kappa^3 - \kappa$  γράφεται σαν γινόμενο τριών διαδοχικών ακεραίων.

6.19. Έστω  $\nu$  θετικός ακέραιος και  $A = \nu^3 - \nu^2 + \nu - 1$ .

- i) Να παραγοντοποιήσετε τον  $A$ .  
 ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\nu$ , για τις οποίες ο  $A$  είναι πρώτος αριθμός.

[Απ. ii)  $\nu=2$ ]

### Διαφορά & άθροισμα κύβων

6.20. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i)  $a^3 - 125$       ii)  $8\kappa^3 + 27$       iii)  $27a^3 + 64\beta^3$   
 iv)  $216\omega^3 - 1$       v)  $x^4 - 64x$

6.21. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

i)  $64x^3y^6 + 27$       ii)  $\frac{\kappa^6}{\mu^3} - \frac{1}{8}$   
 iii)  $a^6 + 64\beta^3$

### Ανάπτυγμα τετραγώνου

6.22. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α)  $1 - 2x + x^2$   
 β)  $\kappa^2 - 4\kappa\nu + 4\nu^2$   
 γ)  $9x^2 + 48xy + 64y^2$   
 δ)  $\frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{5}xy + \frac{4}{25}y^2$   
 ε)  $x^2 - x + \frac{1}{4}$   
 στ)  $\frac{xy}{3} + \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4}$

6.23. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α)  $a(a+2) + 1$   
 β)  $9(x+y)^2 - 6y(x+y) + y^2$   
 γ)  $x + 1 + 2\sqrt{x}$ ,  $x > 0$   
 δ)  $y^2 - 2\sqrt{3}xy + 3x^2$

6.24. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τις αλγεβρικές παραστάσεις

α)  $2ax^2 - 12ax + 18a$   
 β)  $x^2 - 4x^3 + 4x^4$   
 γ)  $x^3 + 2x^2 + x + xy + y$

### Τριώνυμο

6.25. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α)  $x^2 - 10x + 24$   
 β)  $a^2 + 12a + 27$   
 γ)  $y^2 + 3y - 10$   
 δ)  $a^2 + 2a - 15$   
 ε)  $3x^2 - 6x - 24$   
 στ)  $2x^2 - 2x - 40$   
 ζ)  $14 - 5x - x^2$   
 η)  $-x^2 + 2x + 15$   
 θ)  $x^2 - 17x - 84$   
 ι)  $\beta x^2 + 6\beta x + 5\beta$

6.26. Να αποδείξετε ότι η παράσταση  $A = x^2 - 5x + 6$  παίρνει θετικές τιμές, για κάθε  $x > 3$ .

6.27. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

α)  $x^2 + 9ax + 14a^2$   
 β)  $a^2 - 4a\beta + 3\beta^2$   
 γ)  $\mu^2 + 4\mu\nu - 5\nu^2$

### Ανάπτυγμα τετραγώνου και διαφορά τετραγώνων

6.28. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

α)  $x^2 - a^2 + 6a - 9$

- β)  $x^2 - 4y^2 + 4y - 1$
- γ)  $9 - 9a^2 - b^2 + 6ab$
- δ)  $9a^2 - 12a + 4 - 4b^2$
- ε)  $1 + a^2 + 2b\gamma - 2a - b^2 - \gamma^2$
- στ)  $9y^2 - 4x^2 + 4x - 1$
- ζ)  $4x^2 - 36x^2 + 81 - y^2$
- η)  $16y^2 - 9x^2 + 12x - 4$

6.29. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i)  $a^2 + b^2 + 2(ab - 8)$
- ii)  $\kappa^2\lambda^2 - x^2y^2 + \beta^2 - \gamma^2 - 2\kappa\lambda\beta - 2\gamma\chi\gamma$
- iii)  $y^2 - 4\gamma\omega + 3\omega^2 - 2x\omega - x^2$

6.30. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i)  $a^4 + a^2 + 1$
- ii)  $a^4 + a^2b^2 + b^4$
- iii)  $a^4 - 11a^2b^2 + b^4$
- iv)  $x^4 + 3x^2 + 4$
- v)  $y^4 - 2y^2 + 1$
- vi)  $25a^4 + 31a^2b^2 + 16b^4$

6.31. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i)  $\kappa^4 + 4\lambda^4 + 3\kappa^2\lambda^2$
- ii)  $x^4 + 9y^2 + 5x^2y^2$
- iii)  $\kappa^4 - 13\kappa^2 + 36$

Ανάπτυγμα κύβου

6.32. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- α)  $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$
- β)  $8a^3 - 12a^2 + 6a - 1$
- γ)  $a^3x + 6a^2x + 12ax + 8x$

6.33. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

- α)  $(x+y)^3 - 3(x+y)^2 \cdot y + 3(x+y) \cdot y^2 - y^3$
- β)  $(\kappa+\lambda)^3 + (\kappa-\lambda)^3 + 3(\kappa+\lambda)^2 \cdot (\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda) \cdot (\kappa-\lambda)^2$

Όλες οι περιπτώσεις

6.34. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- α)  $(2x-1)(x+3) + 1 - 2x$
- β)  $(a+b)(2b-a) + (a-2b)^2 - (a^2-4b^2)$
- γ)  $(x^2-9)^2 - (x+3)^2$
- δ)  $(2x^2-5x+2)^2 - 4x^2 + 4x - 1$
- ε)  $5\kappa^3 - \frac{9}{5}\kappa$
- στ)  $y^2 + 4x - 16x^2 - y$

6.35. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

- i)  $\kappa^2 + \lambda^2 - \kappa + \lambda - 2\kappa\lambda$
- ii)  $x^2 + (2a+1)x + a^2 + a$
- iii)  $\gamma^2 + 9(\beta^2 - a^2) + 6\beta\gamma$
- iv)  $a^2 + \beta^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2a\beta + 2\gamma\delta$
- v)  $a^2 + a(\beta+1) + \beta(\alpha+1) + \beta^2$

6.36. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- i)  $a^2 + 2a\beta + \beta^2 - x^2 + 4x - 4$

- ii)  $9x^2 - 4y^2 - 4y - 1$
- iii)  $x^2 - y^2 - \omega^2 + 2x - 2y\omega + 1$
- iv)  $x^4 + 5x^2y^2 + 9y^4$
- v)  $9(x+y)^2 - 6\gamma(x+y) + \gamma^2$
- vi)  $(a^3 - 1) - 2(a^2 - 1) - (a - 1)^2$
- vii)  $(\omega - 1)^3 (\omega^2 - 4) + (4 - \omega^2)$

6.37. Να παραγοντοποιήσετε τα πολυώνυμα:

- i)  $(x^2-5x+6)(x-1) - (x-3)(x^2-1)$
- ii)  $4(a\delta + \beta\gamma)^2 - (a^2 - \beta^2 - \gamma^2 + \delta^2)^2$
- iii)  $(5a^2 + 2a - 3)^2 - (a^2 - 2a - 3)^2$
- iv)  $(3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x - 1)^2$
- v)  $(\omega^2 - 9)^2 - (\omega + 3)^2$

6.38. Να γίνει γινόμενο η παράσταση:

$$(v^2 + 3v + 1)^2 - 1.$$

[Απ. v (v+1) (v+2) (v+3) ]

6.39. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- α)  $\kappa^4 - \lambda^4 - (\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^3$
- β)  $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$
- γ)  $a^6 - 1$
- δ)  $(a^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4a^2\beta^2$

6.40. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- α)  $4a^2 - 4a + 1 - 2a(2a-1) + 18a^3 - 9a^2$
- β)  $\kappa^5 + 2\kappa^4 + \kappa^3 - \kappa^2 - 2\kappa - 1$

6.41. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις:

- i)  $1 - x^3$
- ii)  $(2+x+x^2)^2 - 1$
- iii)  $(2+x+x^2)^2 - x^2$
- iv)  $x^3 + 2x^2 - 3$

6.42. Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις

- i)  $a^3 + \beta^3 - a - \beta - a^2\beta - a\beta^2$
- ii)  $a\beta^2 - a^2\beta + \beta\gamma^2 - \beta^2\gamma + a^2\gamma - a\gamma^2$
- iii)  $a\beta^2 + a^2\beta + \beta\gamma^2 + \beta^2\gamma + a^2\gamma + a\gamma^2 + 2a\beta\gamma$
- iv)  $\alpha^3\beta^2 - \alpha^2\beta^3 + \beta^3\gamma^2 - \beta^2\gamma^3 + \gamma^3\alpha^2 - \gamma^2\alpha^3$

Θέματα με παραγοντοποίηση

6.43. i) Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή των μη αρνητικών ακεραίων  $\alpha, \beta$  με  $\alpha > \beta$  ο αριθμός

$$\kappa = \frac{(2\alpha+1)^2 - (2\beta+1)^2}{4}$$

είναι θετικός ακέραιος.

ii) Να προσδιορίσετε τις τιμές των  $\alpha, \beta$  για τις οποίες ο  $\kappa$  είναι πρώτος, δηλαδή είναι  $\kappa > 1$  και οι μοναδικοί θετικοί διαιρέτες του είναι οι αριθμοί 1 και  $\kappa$ .

[Απ. ii)  $\alpha=1, \beta=0$ ]

6.44. Αν ισχύει  $(10^5 + 25)^2 - (10^5 - 25)^2 = 10^v$ , όπου  $v$  φυσικός αριθμός, να βρεθεί η τιμή του  $v$ .

[Απ.  $v=7$ ]

6.45. Να απλοποιηθεί το κλάσμα:

$$K = \frac{2+4+6+8+\dots+2002}{3+6+9+12+\dots+3003}.$$

[Απ.  $K = \frac{2}{3}$ ]

6.46. Να γίνει γινόμενο η παράσταση

$$\Pi = \alpha^3 + \beta^3 - \alpha - \beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2.$$

6.47. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A = (2 + x + x^2) - x^3$$

(Υπόδειξη: Προσθέστε και αφαιρέστε τον 1.)

[Απ.  $A = (1+x+x^2)(4+x^2)$ ]

6.48. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση:

$$x^4 + 4y^4.$$

β) Αν οι αριθμοί  $x, y$  είναι θετικοί ακέραιοι και  $y \geq 2$ , να αποδείξετε ότι ο αριθμός  $x^4 + 4y^4$  είναι σύνθετος.

6.49. Δίνεται το άθροισμα

$$S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \dots + 2^2 - 1^2.$$

α) Να αποδείξετε ότι  $100^2 - 99^2 = 100 + 99$  και έπειτα ότι  $S = 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1$ .

β) Να υπολογίσετε το  $S$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που εφάρμοσε ο Gauss όταν ήταν μικρός.

[Απ. β)  $S=5050$ ]