## ΕΝΟΤΗΤΑ 5.

### *ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ*

**5.1.*Τι ονομάζουμε ταυτότητα;***

***Απάντηση:***

Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών λέγεται **ταυτότητα**.

**5.1.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:**

**(i)** $\alpha(\alpha - 2) = \alpha^2 - 2\alpha$

**(ii)** $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 7x + 10$

**(iii)** $\kappa^2 + \lambda^2 = (\kappa + \lambda)^2 - 2\kappa\lambda$

***Τετράγωνο αθροίσματος***

**5.2.*Να αποδείξετε την ταυτότητα*** $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ .

***Απάντηση:***

Είναι : $$\begin{aligned}(\alpha+\beta)^2 &= (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)\\ &= \alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 .\end{aligned}$$

**5.2.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:** **(i)** $(\alpha + 3)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\cdot 3 + 3^2 = \alpha^2 + 6\alpha + 9.$

**(ii)** $(5x + 4y)^2 = (5x)^2 + 2\cdot 5x\cdot 4y + (4y)^2 = 25x^2 + 40xy + 16y^2.$

**(iii)** $(2\mu^3 + \frac{1}{4}\nu^2)^2 = (2\mu^3)^2 + 2\cdot 2\mu^3\cdot\frac{1}{4}\nu^2 + (\frac{1}{4}\nu^2)^2 = 4\mu^6 + \mu^3\nu^2 + \frac{1}{16}\nu^4.$

***Τετράγωνο διαφοράς***

**5.3.*Να αποδείξετε την ταυτότητα*** $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ .

***Απάντηση:***

Είναι : $$\begin{aligned}(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)\\ &= \alpha^2-\alpha\beta-\beta\alpha+\beta^2\\ &= \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 .\end{aligned}$$

**5.3.1. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:** **(i)** $(\beta - 11)^2 = \beta^2 - 2\beta\cdot 11 + 11^2 = \beta^2 - 22\beta + 121.$

**(ii)** $(-6x^2 + 7\alpha)^2 = (7\alpha - 6x^2)^2 = (7\alpha)^2 - 2\cdot 7\alpha\cdot 6x^2 + (6x^2)^2 = 49\alpha^2 - 84\alpha x^2 + 36x^4.$

**(iii)** $$\left(-\frac{\kappa^4}{2} - 4\lambda\mu^3\right)^2 = \left[-\left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)\right]^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2} + 4\lambda\mu^3\right)^2 = \left(\frac{\kappa^4}{2}\right)^2 + 2\cdot\frac{\kappa^4}{2}\cdot 4\lambda\mu^3 + (4\lambda\mu^3)^2$$
$$= \frac{\kappa^8}{4} + 4\kappa^4\lambda\mu^3 + 16\lambda^2\mu^6.$$

***Κύβος αθροίσματος***

**5.4.*Να αποδείξετε την ταυτότητα*** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ **.**

***Απάντηση:***

Είναι : $(\alpha+\beta)^3 = (\alpha+\beta)(\alpha+\beta)^2$

$= (\alpha+\beta)(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

$= \alpha^3+2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2+\beta^3$

$= \alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ .

***Κύβος διαφοράς***

**5.5.*Να αποδείξετε την ταυτότητα*** $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ **.**

***Απάντηση:***

Είναι : $(\alpha-\beta)^3 = (\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^2$

$= (\alpha-\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$

$= \alpha^3-2\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2+2\alpha\beta^2-\beta^3$

$= \alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ .

***Γινόμενο αθροίσματος επί διαφορά***

**5.6.*Να αποδείξετε την ταυτότητα*** $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\beta^2$ **.**

***Απάντηση:***

Είναι : $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) = \alpha^2-\alpha\beta+\beta\alpha-\beta^2$

$= \alpha^2-\beta^2$ .

**5.6.1. <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ:</u>** **(i)** $(9\alpha x+2\beta y)(9\alpha x-2\beta y) = (9\alpha x)^2-(2\beta y)^2 = 81\alpha^2x^2-4\beta^2y^2$.

**(ii)** $(-3\mu^5+\lambda^3\nu^2)(3\mu^5+\lambda^3\nu^2) = (\lambda^3\nu^2-3\mu^5)(\lambda^3\nu^2+3\mu^5) = (\lambda^3\nu^2)^2-(3\mu^5)^2 = \lambda^6\nu^4-9\mu^{10}$.

***Διαφορά κύβων – Άθροισμα κύβων***

**5.7.*Να αποδείξετε τις ταυτότητες*** (i) $\alpha^3-\beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$ **.**

(ii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ **.**

***Απάντηση:***

**(i)** Το $2^o$ μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2-\beta\alpha^2-\alpha\beta^2-\beta^3$

$= \alpha^3-\beta^3$ .

**(ii)** Το $2^o$ μέλος της ταυτότητας γράφεται:

$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\beta\alpha^2-\alpha\beta^2+\beta^3$

$= \alpha^3+\beta^3$ .

## *ΑΣΚΗΣΕΙΣ*

***Α΄ Ομάδα***

**5.8.**Να βρείτε τα αναπτύγματα:

**α)** $(x+5)^2$ **β)** $(2x-3)^2$ **γ)** $(3\alpha-7\beta)^2$

**δ)** $(3xy+2)^2$ **ε)** $(x^2-4y)^2$ **στ)** $(2\alpha^3-\alpha\beta^2)^2$

**5.9.**Να βρείτε τα αναπτύγματα:

**α)** $(\frac{3}{2}x^2+4xy)^2$ **β)** $(7\alpha-\frac{3}{2}\beta^2)^2$

**γ)** $(3\alpha-\frac{1}{2\alpha})^2$ **δ)** $(\frac{3}{4a^2}+2\alpha^3\beta)^2$

**ε)** $(\frac{5}{6}x^2y^4-\frac{2}{xy})^2$ **στ)** $(\frac{1}{2}\alpha\beta^2\gamma^3-\frac{6}{\beta\gamma^2})^2$

**5.10.**Να βρείτε τα αναπτύγματα:

**α)** $(-\alpha^2+2\beta^4)^2$ **β)** $(-2x^3+\frac{y^2}{4})^2$

**γ)** $(-\frac{2}{3}\alpha^2x^3-\frac{3}{4}\beta^5)^2$ **δ)** $(-\frac{1}{4}x^2y^3-\frac{11}{6x^2y})^2$

**5.11.**Να μετατρέψετε την παράσταση $(\alpha+\beta)^2+2(\alpha\gamma+\beta\gamma)$ σε μία δύναμη.

**5.12.**Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

**α)** $x^2+2\alpha x+\ldots$ **β)** $4x^2+4xy+\ldots$

**γ)** $9\alpha^2-6\alpha\beta+\ldots$ **δ)** $x^2+4y^2+\ldots$

**ε)** $25\alpha^2 + 4\beta^2 + \ldots$ **στ)** $81\mu^2 + 49\nu^2 - \ldots$
**ζ)** $40xy + 16x^2 + \ldots$ **η)** $-60\kappa\lambda + 9\kappa^2 + \ldots$
**θ)** $12\mu^3\nu^2 + 4\nu^4 + \ldots$

**5.13.** Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε να προκύψουν τέλεια τετράγωνα και μετά να τα γράψετε ως τέλεια τετράγωνα:

**α)** $\alpha^2 - \alpha\beta + \ldots$ **β)** $\alpha^2 + \frac{1}{4} + \ldots$
**γ)** $x^2 + \frac{6}{5}x + \ldots$ **δ)** $49\alpha^6 + \beta^8 + \ldots$
**ε)** $\frac{9}{4}x^2 - 6xy + \ldots$ **στ)** $\frac{25}{4}a^2 - 5\beta + \ldots$

**5.14.** Αν $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha, \beta$ είναι αντίστροφοι.

**5.15.** Να αποδείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης $Α = (2\nu+3)^2 - (2\nu-3)^2$ είναι πάντοτε πολλαπλάσιο του 24, όταν ο $\nu$ παίρνει ακέραιες τιμές.

**5.16.i)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\kappa^2 + \lambda^2$ και $2\kappa\lambda$.
**ii)** Με τη βοήθεια της προηγούμενης σύγκρισης να αποδείξετε ότι:
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha.$$

**5.17.** Να βρείτε τα γινόμενα:
**α)** $(4x+3)(4x-3)$ **β)** $(\alpha\beta+2)(\alpha\beta-2)$
**γ)** $(5\alpha-2\beta^3)(5\alpha+2\beta^3)$ **δ)** $(2x^2y^4-3a^3x)(2x^2y^4+3a^3x)$

**5.18.** Να βρείτε τα γινόμενα:
**α)** $(7a+4\beta)(4\beta-7\alpha)$
**β)** $(\frac{2}{5}x^2y^3 - \omega^2)(\omega^2 + \frac{2}{5}x^2y^3)$
**γ)** $(4\alpha x^3 - 9\beta^2 y)(-4\alpha x^3 - 9\beta^2 y)$
**δ)** $(\sqrt{2}\,x^3 - a^4\kappa)(-a^4\kappa - \sqrt{2}\,x^3)$

**5.19.** Να βρείτε τα γινόμενα:
**α)** $(x+y-1)(x+y+1)$
**β)** $(2x+y-3\omega)(2x+y+3\omega)$
**γ)** $(2\alpha+\beta-3\gamma)(2\alpha-\beta+3\gamma)$
**δ)** $(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1)$
**ε)** $(\alpha-x+\beta-y)(\alpha+x+\beta+y)$

**5.20.** Αν $\alpha = \sqrt{2} - 1$ , $\beta = \sqrt{2} + 1$ , να υπολογιστούν:
**i)** $\alpha \cdot \beta$ **ii)** $\alpha + \beta$ **iii)** $\frac{\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha+\beta}$

[Απ. i)1 ii)2$\sqrt{2}$ iii)6]

**5.21.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:
**α)** $(x + 4)^3$ **β)** $(2x - 3)^3$ γ) $(2x - 3y)^3$
**δ)** $(3xy + 2)^3$ **ε)** $(-x^2 + 2y)^3$ **στ)** $(-2a^3 - \alpha x^2)^3$

**5.22.** Να γίνουν οι πράξεις:
**α)** $(\alpha+3\beta)^2 - (\alpha-2\beta)^2 - 5\beta^2$
**β)** $(x-\alpha)^2 - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta-3x) - (x-\beta)^2$
**γ)** $(x^3+2y^2)^2 - (y^2+2x^3)^2 + (x^3-2y^2)(x^3+2y^2)$
**δ)** $(2x+3)^2 + (2x-3)^2 + (2x+3)(2x-3) - 3(x-5)^2$

**5.23.** Να εκτελέσετε τις πράξεις:
**α)** $(x+3)^2 + (x-3)^2 + (x-2)^2 - (x+2)^2 + (x+3)(x-3) - (x+2)(x-2)$
**β)** $(2x+5)^2 - (x-5)^2 + (3x-1)^2 - (2x+1)^2 - (2x-3)(2x+3)$
**γ)** $-(2x+1)^2 + (2x+1)(-2x-1) - (x+3)(x-3) - (x-3)(-x-3)$
**δ)** $(x^2+1)^2 + (2x^2-3)^2 - (3x^2+4)^2 + (x^2-2)^2 + (x^2-3)(x^2+3)$

**5.24.** Να αποδείξετε ότι:
$$(3x+2)(3x-2)(x-1) - (2x-1)^3 - x(x-2)(x-5) + 5 = 10(x-1)^2.$$

**5.25.** Αν $\alpha = 2\sqrt{4-\sqrt{15}}$ και $\beta = \sqrt{6} - \sqrt{10}$ τότε:
**i)** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\alpha^2 - \beta^2$.
**ii)** Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha$ και $\beta$ είναι αντίθετοι.

**5.26.** Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ δίνονται από τις ισότητες
$$\beta = \sqrt{7-2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7+2\sqrt{6}} \quad \text{και} \quad \gamma = \frac{3}{4-\sqrt{14}} + \frac{3}{4+\sqrt{14}}.$$
Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου.

[Απ. Π=30, Ε=30]

**5.27.** Αν αφαιρέσουμε από το τετράγωνο του ημιαθροίσματος δύο αριθμών, το τετράγωνο της ημιδιαφοράς τους, βρίσκουμε τον αριθμό 1. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί αυτοί είναι αντίστροφοι.

**5.28.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\rho = 10 + 5\sqrt{2}$ είναι λύση της εξίσωσης: $x^2 - 20x + 50 = 0$.

**5.29.** Αν $x^2 - 6xy + 11y^2 - 8y + 8 = 0$
**α)** Να δείξετε ότι: $(x - 3y)^2 + 2(y - 2)^2 = 0$.
**β)** Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $Α(x,y)$ που επαληθεύουν την παραπάνω εξίσωση.

[Απ. β)Α(6,2)]

**5.30.** Να αποδείξετε ότι:
**α)** $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)^3 + 3\alpha\beta(\alpha - \beta)$.
**β)** $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$.

**5.31.** Να εκτελεστούν οι πράξεις:
**α)** $(x-1)^3 - (3x+2)^3 - x(x-2)(x+2)$
**β)** $(x+y)^3 - y(x-y)(x+y) - x(x-y)$
**γ)** $(x+2)^3 - 3x(x-1)^2 + (x-1)(x+1)(x-2)$

**5.32.** Να βρείτε τα εξαγόμενα:
**i)** $(x+1)^3 + 3(x+1)^2(x-1) + 3(x+1)(x-1)^2 + (x-1)^3$
**ii)** $(x-y)^3 - 3(x-y)^2(x+y) + 3(x-y)(x+y)^2 - (x+y)^3$
**iii)** $(\kappa+\lambda)^3 - (\kappa-\lambda)^3 - 3(\kappa+\lambda)^2(\kappa-\lambda) + 3(\kappa+\lambda)(\kappa-\lambda)^2$

**iv)** $\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)^3 + \left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right)^3 + 3\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right) + 3\left(\frac{5}{2}x-\frac{y}{5}\right)\cdot\left(\frac{5}{2}x+\frac{y}{5}\right)^2$

**5.33.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $(\alpha+\beta)^2 - (\alpha-\beta)^2 = 4\alpha\beta$

**β)** $(\alpha^2+\beta^2)^2 - (2\alpha\beta)^2 = (\alpha^2-\beta^2)^2$

**γ)** $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 = \alpha\beta$

**δ)** $(x+3y)^2 - (x-2y)^2 - 5y^2 = 10xy$

**ε)** $(\alpha^2+4)(x^2+1) - (\alpha x+2)^2 = (2x-\alpha)^2$

**στ)** $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (\alpha x+\beta y)^2 + (\alpha y-\beta x)^2$

**5.34.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\left[\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\right]^2 = \alpha^3$

**5.35.** Αν $\mu > \nu$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\mu^2 + \nu^2$, $\mu^2 - \nu^2$ και $2\mu\nu$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

**5.36.** Αν $\mu > 1$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\mu$, $\frac{\mu^2-1}{2}$ και $\frac{\mu^2+1}{2}$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

**5.37.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $(\alpha+\beta)^2 + (\beta+\gamma)^2 + (\gamma+\alpha)^2 - \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2$

**β)** $(x^2+y^2+xy)^2 = x^2y^2 + (x+y)^2(x^2+y^2)$

**γ)** $(\alpha+\beta+\gamma)^2 + (\alpha+\beta-\gamma)^2 + (\alpha-\beta+\gamma)^2 + (\alpha-\beta-\gamma)^2 = 4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$

**5.38.** Να αποδείξετε ότι:

$(3x^2+2)^2 - (2x^2+3)^2 - 2(2x^2-1)^3 + 27x^2 = 5(x^4-1) - (x^2-2)(4x^2+1)^2$

**5.39.** Να υπολογίσετε τις αριθμητικές παραστάσεις:

**α)** $999^2 + 1998 + 1$

**β)** $1001^2 + 1 - 2002$

**γ)** $1001 \cdot 999 = (1000+1)(\ldots - \ldots)$

**δ)** $99^3 + 3\cdot 99^2 + 3\cdot 99 + 1$

**ε)** $101^3 - 3\cdot 101^2 + 303 - 1$

**5.40.** Να συμπληρώσετε τα κενά:

**i)** $(2\alpha + \ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 9\beta^2$

**ii)** $(3\alpha + \ldots)^2 = \ldots\ldots + \ldots\ldots + 4x^4$

**iii)** $(\ldots - 3y^3)^2 = 25x^4 - \ldots\ldots + \ldots\ldots$

**iv)** $(\ldots - 3\kappa)^2 = \ldots\ldots - 24\mu^2\kappa + \ldots\ldots$

**v)** $(\ldots + \ldots)^2 = 4\alpha^2 + 9\beta^4 + \ldots\ldots$

**vi)** $(\ldots - \ldots)^2 = 9x^2 - 9x + \ldots\ldots$

**5.41.** Να συμπληρώσετε τα κενά:

**i)** $(5\alpha^3 + \ldots)(\ldots - 8\beta^2) = \ldots\ldots - \ldots\ldots$

**ii)** $(\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots) = 121\alpha^8x^2 - \frac{9}{4}\beta^2y^6$

**iii)** $(\ldots - \ldots)(\frac{1}{2}x^3 + \ldots) = \ldots\ldots - 3\alpha^2\beta^4$

**5.42.** Να συμπληρώσετε τα κενά:

**i)** $(\ldots + \ldots)^3 = 64\alpha^3 + \ldots\ldots + \ldots\ldots + 125\beta^3$

**ii)** $(\ldots + \ldots)^3 = 8\alpha^3 + 12\alpha^2\beta + \ldots\ldots + \ldots\ldots$

**iii)** $(\ldots - 3\alpha)^3 = 1000x^3 - \ldots\ldots + \ldots\ldots - \ldots\ldots$

**5.43.** Να αποδείξετε τις ισότητες:

**i)** $(\alpha+1)^3 = \alpha(\alpha-3)^2 + (3\alpha-1)^2$

**ii)** $(\alpha+\beta)^3 = \alpha(\alpha-3\beta)^2 + \beta(\beta-3\alpha)^2$

**iii)** $(x^3+y^3)^2 - (x^2+y^2)^3 + 3x^2y^2(x+y)^2 = (2xy)^3$

**5.44.** Αν $x = \alpha^2-\beta^2$, $y = 2\alpha\beta$ και $\omega = \alpha^2+\beta^2$, να αποδείξετε ότι θα είναι $x^2 + y^2 = \omega^2$.

**5.45.** Αν $\alpha = (x+1)^2$, $\beta = (x-1)^2$ και $\gamma = \alpha+8$ τότε αποδείξτε ότι:

$$\alpha - \beta + \gamma = (x+3)^2$$

**5.46.** Αν $x + y = 3$ και $xy = -1$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

**i)** $x^2 + y^2$ **ii)** $x^3 + y^3$

[Απ.i)11 ii)36]

**5.47.** Αν $x + y = \alpha$ και $xy = \beta$, να αποδείξετε ότι:

**i)** $x^2 + y^2 = \alpha^2 - 2\beta$ **ii)** $x^3 + y^3 = \alpha^3 - 3\alpha\beta$

**5.48.** Αν $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{2}$, να βρεθεί η τιμή των επόμενων παραστάσεων:

**i)** $\mathrm{A} = \alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2$

**ii)** $\mathrm{B} = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$

**5.49.** Να βρεθούν δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί που τα τετράγωνά τους να διαφέρουν κατά 99.

[Απ.49 , 50]

**5.50.** Αν $\alpha - \frac{1}{\alpha} = 7$, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

**i)** $\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}$ **ii)** $\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}$.

[Απ.i)51 ii)364]

**5.51.** Αν $x > 0$ και $(x + \frac{1}{x})^2 = 9$, να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

[Απ.18]

**5.52.** Να αποδείξετε τις επόμενες ανισότητες:

**i)** $\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta$

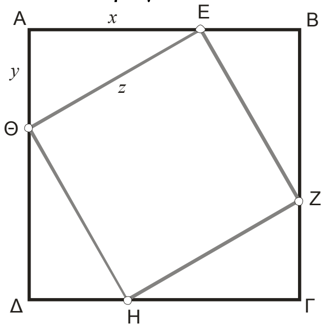
**ii)** $(\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta$

**iii)** $\frac{x^2+1}{2} \geq x$

**iv)** $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \geq 2$ , $\alpha > 0$

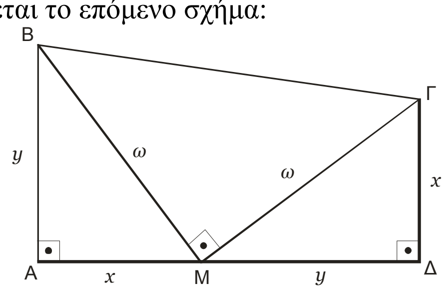
Πότε ισχύει η ισότητα σε κάθε μία από αυτές;

**5.53.** Στο παρακάτω σχήμα το τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι εγγεγραμμένο στο τετράγωνο ΑΒΓΔ.




Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο τετραγώνων και των ίσων τεσσάρων ορθογωνίων τριγώνων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = z^2$.

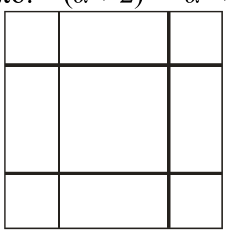
**5.54.** Δίνεται το επόμενο σχήμα:




Να χρησιμοποιήσετε την ισότητα που προκύπτει από τα εμβαδά των δύο σχημάτων για να συμπεράνετε το Πυθαγόρειο θεώρημα, δηλαδή ότι: $x^2 + y^2 = \omega^2$.

***<u>Β΄ Ομάδα</u>***

**5.55.** Χρησιμοποιήστε το πιο κάτω σχήμα για να δικαιολογήσετε τον τύπο: $(\alpha + 2)^2 = \alpha^2 + 4\alpha + 4$.



**5.56.** Αν οι αριθμοί $x, y, z$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα το $x$, τότε δείξτε ότι και οι αριθμοί $\alpha = 3x + 2y + 2z$ , $\beta = 2x + y + 2z$ , $\gamma = 2x + 2y + z$ είναι πλευρές ορθογώνιου τριγώνου.

**5.57.** Να δείξετε ότι το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών φυσικών αριθμών αυξημένο κατά μια μονάδα είναι τέλειο τετράγωνο. Δηλαδή,

$$\nu(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3) + 1 = (\nu^2+3\nu+1)^2.$$

**5.58.** Αν $x \cdot y = 6$ και $x^2y + xy^2 + x + y = 35$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $x^2 + y^2$.

[Απ. 13]

**5.59.** Δίνεται η αλγεβρική παράσταση:

$$\mathrm{A} = \alpha^2 - 10\alpha\beta + 27\beta^2 - 8\beta + 8.$$

**α)** Να μετασχηματίσετε την παράσταση Α σε άθροισμα τετραγώνων.

**β)** Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta$ για τις οποίες η παράσταση Α παίρνει την ελάχιστη τιμή.

[Απ. β) α=10, β=2]

**5.60.** Για τους πραγματικούς αριθούς $x, y, z, w$ ισχύει η ισότητα $x^2 + 10y^2 + 10z^2 + 9w^2 = 6(xy + yz + zw)$.

**α)** Να μετασχηματίσετε την ισότητα ώστε στο ένα μέλος να γραφεί σαν άθροισμα τριών τέλειων τετραγώνων και στο άλλο μέλος το 0.

**β)** Να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους $x$ και $w$.

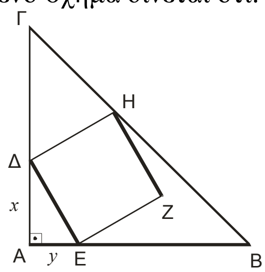
[Απ. x=27w]

**5.61.** Να υπολογίσετε τους αριθμούς $\alpha, \beta$ και $\gamma$ οι οποίοι ικανοποιούν την παρακάτω σχέση:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha - 4\beta - 6\gamma + 14 = 0.$$

[Απ. α=1, β=2, γ=3]

**5.62.** Για το επόμενο σχήμα δίνεται ότι:




Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. $\mathrm{A\Delta} = x$ , $\mathrm{AE} = y$ , $\mathrm{A\Gamma} = 2x + y$.

Το εμβαδόν (ΔΕΖΗ) του τετραγώνου ΔΕΖΗ ισούται με τα $\dfrac{2}{5}$ του εμβαδού (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ. Να υπολογίσετε:

**i)** Το λόγο $\dfrac{x}{y}$

**ii)** Το λόγο $\dfrac{(\mathrm{A\Delta E})}{(\mathrm{AB\Gamma})}$

[Απ. i) 2 ii) $\frac{2}{25}$ ]