ΕΝΟΤΗΤΑ 1.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1.1. ***Ποιές είναι οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού;***

Απάντηση:

Οι ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού παρουσιάζονται στον επόμενο πίνακα:

Πρόσθεση	Πολλαπλασιασμός	Ιδιότητα
$\alpha+\beta=\beta+\alpha$	$\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$	αντιμεταθετική
$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$	$\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)=(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma$	προσεταιριστική
$\alpha+0=\alpha$	$\alpha\cdot 1=\alpha$	
$\alpha+(-\alpha)=0$	$\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}=1\ ,\ \alpha\neq 0$	
$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$		επιμεριστική
	$\alpha\cdot 0=0$	

1.2. ***Να γράψετε τους ορισμούς και τις ιδιότητες των δυνάμεων.***

Απάντηση:

Ορισμοί:

Αν α πραγματικός αριθμός και ν φυσικός με $\nu\geq 2$ τότε ορίζουμε:

$$\alpha^{\nu}=\underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu-\pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\varepsilon\varsigma}$$

Για $\nu=1$ ορίζουμε $\alpha^{1}=\alpha$.

Για $\alpha\neq 0$, ορίζουμε $\alpha^{0}=1$ και

$$\alpha^{-\nu}=\frac{1}{\alpha^{\nu}}.$$

Είναι $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu}=\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$, $\alpha,\beta\neq 0$

Ιδιότητες:

Με την προϋπόθεση ότι κάθε φορά ορίζονται οι δυνάμεις και οι πράξεις που σημειώνονται έχουμε:

1. $\alpha^{\mu}\cdot\alpha^{\nu}=\alpha^{\mu+\nu}$
2. $\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}}=\alpha^{\mu-\nu}$
3. $\alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(\alpha\cdot\beta)^{\nu}$
4. $\frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu}$
5. $(\alpha^{\mu})^{\nu}=\alpha^{\mu\nu}$

1.3. ***Τι ονομάζουμε τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α;.***

Απάντηση:

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, ονομάζουμε τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, μας δίνει τον αριθμό α.

Δηλαδή $\sqrt{\alpha}=x$, τότε $x^2=\alpha$ ή $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$.

Ακόμα ορίζουμε $\sqrt{0}=0$.

1.4. ***Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}$, με $\alpha,\beta\geq 0$.***

Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

Από το 1ο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2\cdot\left(\sqrt{\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$

Από το 2ο μέλος: $\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2=\alpha\cdot\beta$

Άρα $\left(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2$ και επομένως $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

1.5. ***Να αποδείξετε ότι*** $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ ***με*** $\alpha \geq 0$ ***και*** $\beta > 0$.

Απάντηση:

Υψώνουμε κάθε μέλος της ισότητας στο τετράγωνο και έχουμε:

Από το 1° μέλος: $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\left(\sqrt{\alpha}\right)^2}{\left(\sqrt{\beta}\right)^2} = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Από το 2° μέλος: $\left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2 = \dfrac{\alpha}{\beta}$

Άρα $\left(\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}\right)^2 = \left(\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}\right)^2$ και επομένως $\dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$.

1.5.1. Αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τότε $\sqrt{\alpha+\beta} \neq \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

Η ισότητα $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$ ισχύει αν ένας τουλάχιστον είναι ίσος με 0.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ Ομάδα

1.6. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 2003 - \frac{6-10x+2(4x-y-3)}{3(x-z)+3(y+z)} - 2(x+\frac{1}{3}) - 2y,$$

αν είναι $x + y = 2003$.

[Απ. Α=-2003]

1.7. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{12^{15}\cdot 18^{17}}{36^{24}}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$$

[Απ. Π=1]

1.8. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5)^2\cdot(2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2)^2$$

σε δύναμη με βάση το 10.

[Απ. 10^{12}]

1.9. Να μετατρέψετε την παράσταση:

$$(3^3)^3 : 3^3 + 3^3 \cdot 3^3 + \left(\frac{3^3}{3}\right)^3$$

σε δύναμη με βάση το 3.

[Απ. 3^7]

1.10. Αν ισχύει $\dfrac{3x+4y}{2x-2y} = 5$ να αποδείξετε ότι το κλάσμα $A = \dfrac{x^2+2y^2}{xy}$ έχει σταθερή τιμή.

[Απ. Α=3]

1.11. Αν $x = 0{,}03$ και $y = \dfrac{3}{10}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \left[(x^{-3}y^5)^{-2} : \dfrac{x^7}{y^{11}}\right]^3$.

[Απ. Α=1000]

1.12. Αν $x = 2$ και $y = 10^{-1}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 5^{-1}\cdot(x^{-1} - y^{-1} - 2x^{-1}y)$$

[Απ. $-\frac{48}{25}$]

1.13. Δείξτε ότι $\sqrt{31+\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}}} = 6$.

1.14. Δείξτε ότι $\sqrt{24\sqrt{6\sqrt{9\sqrt{16}}}} = 12$.

1.15. Να γίνουν οι πράξεις:

α) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{24}$

β) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}\cdot\sqrt{\dfrac{12}{5}}\cdot\sqrt{\dfrac{45}{4}}$

[Απ. α)12 β)3]

1.16. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

α) $\dfrac{\sqrt{20}\cdot\sqrt{6}}{\sqrt{15}\cdot\sqrt{2}}$ **β)**

[Απ. α)2 β)]

1.17. Να εξετάσετε αν η παράσταση:

$$\sqrt{\sqrt{16}} + 2\sqrt{\sqrt{81}} - \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$$

είναι πολλαπλάσιο του 7.

[Απ. 14=πολ.7]

1.18. Αν α, β είναι μη αρνητικοί αριθμοί, να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\sqrt{49-2\beta+\sqrt{4\beta^2+\alpha-\sqrt{\alpha^2}}}\ .$$

[Απ. 7]

1.19. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$A = \dfrac{4+\sqrt{12}}{2}$ και $B = \dfrac{8-\sqrt{20}}{2}$

[Απ. $A=2+\sqrt{3}$, $B=4-\sqrt{5}$]

1.20. Αν x, y είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι η παράσταση:

$5x\sqrt{xy^3} - 2y\sqrt{x^3y} - 3\sqrt{x^3y^3}$

είναι ίση με μηδέν.

1.21. Να βρείτε το εμβαδόν ενός τριγώνου με μια πλευρά $\sqrt{12}$ cm και αντίστοιχο ύψος $\sqrt{3}$ cm.

[Απ. $E=3cm^2$]

1.22. Να βρείτε το αποτέλεσμα:

i) $\sqrt{6-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{6+\sqrt{11}}$

ii) $\sqrt{\sqrt{19}+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{19}-\sqrt{3}}$

[Απ. i)5 ii)4]

1.23. Αν $A = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ και $B = \sqrt{12} - \sqrt{8}$, να υπολογιστούν οι παραστάσεις: $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$.

[Απ. $A+B=3\sqrt{3}-\sqrt{2}$, $A-B=3\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $AB=2$]

1.24. Να απλοποιήσετε οι παραστάσεις

i) $A = \dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{27}}{\sqrt{3}}$ **ii)** $B = \dfrac{\sqrt{8}+\sqrt{2}+5\sqrt{2}}{8\sqrt{8}}$

[Απ. i)A=6 ii)$B=\frac{1}{2}$]

1.25. Να βρείτε το αποτέλεσμα:

$\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} + \dfrac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$

[Απ. 7]

1.26. Να λύσετε την εξίσωση:

$x\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{5}\,(1-x)$

[Απ. x=1]

1.27. Να λύσετε την εξίσωση:

$\dfrac{x-1}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{x+1}{\sqrt{5}+1}$

[Απ. $x=\sqrt{5}$]

1.28. Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης

$\left(\dfrac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}+13\right):\sqrt{3}$ είναι ίση με 6.

1.29. Να αποδείξετε ότι:

$\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}+\sqrt{60}-\sqrt{\dfrac{3}{5}}\right):\dfrac{32\sqrt{15}}{15} = 1.$

1.30. Ένα τραπέζιο έχει βάσεις $\sqrt{27}$ cm και $\sqrt{12}$ cm και ύψος $2\sqrt{3}$ cm. Πόσες φορές είναι μεγαλύτερο το εμβαδόν του από το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς $\sqrt{5}$ cm;

[Απ. 3 φορές]

* * * * *

β΄ Ομάδα

3.1. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^2}} + \sqrt{\dfrac{1}{\left(\sqrt{2}+2\right)^2}} = 1.$

3.2. Να συμπληρώσετε το παρακάτω τετράγωνο ώστε να γίνει "**μαγικό**", δηλαδή όλες του οι γραμμές, οι στήλες και οι διαγώνιοι να έχουν το ίδιο άθροισμα.

$\sqrt{32}$		
$9\sqrt{2}$	$\sqrt{50}$	
$\sqrt{8}$		

3.3. Να υπολογιστεί η παράσταση $\sqrt{\dfrac{8^{10}+4^{10}}{8^4+4^{11}}}$

[Απ. 16]