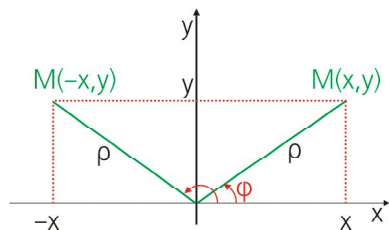


2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

Ερώτηση 1

Ποιες γωνίες ονομάζονται παραπληρωματικές;
Ποια από τα παρακάτω ζεύγη γωνιών: 120° με 60° , 30° με 130° και 70° με 110° είναι παραπληρωματικές;

Απάντηση

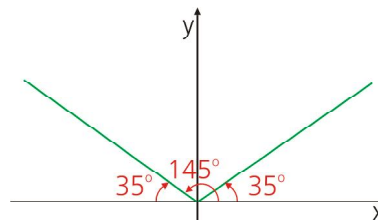


- **Παραπληρωματικές** ονομάζονται οι γωνίες που έχουν άθροισμα 180° . Η μία ονομάζεται και παραπλήρωματική της άλλης.
- Για παράδειγμα, παραπληρωματικές γωνίες είναι:
 120° με 60° γιατί $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$
 70° με 110° γιατί $70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$

Ερώτηση 2

Τι ισχύει για τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των παραπληρωματικών γωνιών;
Αν $\eta\mu x = \eta\mu 35^\circ$ και x είναι μεταξύ 0° και 180° τότε ποια μπορεί να είναι η γωνία x ;

Απάντηση



Για δύο παραπληρωματικές γωνίες, έστω φ και $180^\circ - \varphi$ ισχύουν:

- $\eta\mu(180^\circ - \varphi) = \frac{y}{\rho} = \eta\mu\varphi$
- $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \varphi) = \frac{-x}{\rho} = -\frac{x}{\rho} = -\sigma\upsilon\nu\varphi$
- $\epsilon\varphi(180^\circ - \varphi) = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} = -\epsilon\varphi\varphi$

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$x = 35^\circ \quad \text{ή} \quad x = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών:

α) 120° β) 135° γ) 150°

Λύση

α) Επειδή $120^\circ = 180^\circ - 60^\circ$ είναι:

$$\eta\mu 120^\circ = \eta\mu(180^\circ - 60^\circ) = \eta\mu 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu 120^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 60^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\epsilon\phi 120^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 60^\circ) = -\epsilon\phi 60^\circ = -\sqrt{3}$$

β) $\eta\mu 135^\circ = \eta\mu(180^\circ - 45^\circ) = \eta\mu 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu 135^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 45^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\epsilon\phi 135^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$$

γ) $\eta\mu 150^\circ = \eta\mu(180^\circ - 30^\circ) = \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu 150^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 30^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\epsilon\phi 150^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 30^\circ) = -\epsilon\phi 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

2

Να αποδείξετε ότι:

α) $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$

β) $\epsilon\phi 122^\circ - \epsilon\phi 58^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ = 0$

Λύση

α) $\eta\mu 108^\circ + \sigma\upsilon\nu 77^\circ - \eta\mu 72^\circ + \sigma\upsilon\nu 103^\circ = 0$

διότι: $\eta\mu 108^\circ = \eta\mu(180^\circ - 72^\circ) = \eta\mu 72^\circ$

$\sigma\upsilon\nu 103^\circ = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - 77^\circ) = -\sigma\upsilon\nu 77^\circ$

β) Είναι: $\epsilon\phi 135^\circ = \epsilon\phi(180^\circ - 45^\circ) = -\epsilon\phi 45^\circ = -1$

Άρα: $\epsilon\phi 122^\circ - \epsilon\phi 58^\circ \cdot (-1) = \epsilon\phi 122^\circ + \epsilon\phi 58^\circ =$

$\epsilon\phi(180^\circ - 58^\circ) + \epsilon\phi 58^\circ = -\epsilon\phi 58^\circ + \epsilon\phi 58^\circ = 0$

3

Να αποδείξετε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$

β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ = 2$

Λύση

α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = \sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2(180^\circ - 45^\circ) =$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

β) $\eta\mu^2 30^\circ + \eta\mu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ + \eta\mu^2 150^\circ =$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \eta\mu^2(180^\circ - 60^\circ) + \eta\mu^2(180^\circ - 30^\circ) =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

Να βρείτε τη γωνία x , όταν:

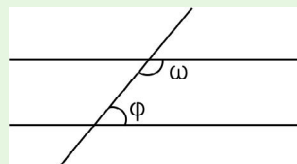
- 4 α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ β) $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$ γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 δ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ ε) $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ στ) $2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x$

Λύση

- α) $\eta\mu x = \frac{\sqrt{2}}{2} = \eta\mu 45^\circ$, άρα $x = 45^\circ$ ή $x = 135^\circ$.
 β) $\eta\mu x = 1 - \eta\mu x$, $2\eta\mu x = 1$, $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, άρα $x = 30^\circ$ ή $x = 150^\circ$.
 γ) $\sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, άρα $x = 30^\circ$ ή $x = 150^\circ$.
 δ) $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$ ή $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 120^\circ$ ή $x = 120^\circ$
 ε) $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ ή $\epsilon\phi x = \epsilon\phi 120^\circ$ ή $x = 120^\circ$
 στ) $2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x$, $\epsilon\phi x = 1$, $x = 45^\circ$

5

Στο διπλανό σχήμα να αποδείξετε ότι οι γωνίες ω και ϕ έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών αυτών;



Λύση

Επειδή $\omega + \phi = 180^\circ$
 $\eta\mu\omega = \eta\mu(180^\circ - \phi) = \eta\mu\phi$ και
 $\sigma\upsilon\nu\omega = \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \phi) = -\sigma\upsilon\nu\phi$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. $\eta\mu 160^\circ = \eta\mu 20^\circ$

β. $\sigma\upsilon\nu 145^\circ = \sigma\upsilon\nu 35^\circ$

γ. $\epsilon\phi 90^\circ = \epsilon\phi 70^\circ$

δ. $\epsilon\phi 65^\circ = -\epsilon\phi 115^\circ$

ε. $\sigma\upsilon\nu 105^\circ = -\sigma\upsilon\nu 75^\circ$

στ. $\eta\mu 103^\circ = -\eta\mu 77^\circ$

2 Αν για τη γωνία x ισχύει $0 \leq x \leq 180^\circ$, να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\eta\mu x = \eta\mu 30^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

β. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu 45^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

γ. Αν $\epsilon\phi x = -\epsilon\phi 60^\circ$, τότε $x = \dots\dots\dots$

2.2 Τριγωνομετρικοί αριθμοί παραπληρωματικών γωνιών

3

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α τον ίσο του τριγωνομετρικό αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\eta\mu 150^\circ$	1. $\eta\mu 30^\circ$
β. $\sigma\upsilon\nu 160^\circ$	2. $\sigma\upsilon\nu 40^\circ$
γ. $\epsilon\phi 155^\circ$	3. $\epsilon\phi 40^\circ$
	4. $-\eta\mu 40^\circ$
	5. $-\sigma\upsilon\nu 20^\circ$
	6. $-\epsilon\phi 25^\circ$

α	β	γ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha. \sigma\upsilon\nu^2 110^\circ + \eta\mu^2 70^\circ = 1 \quad \beta. \sigma\upsilon\nu^2 60^\circ + \eta\mu^2 120^\circ = 1 \quad \gamma. \sigma\upsilon\nu^2 133^\circ + \eta\mu^2 47^\circ = 1 \quad \delta. \sigma\upsilon\nu^2 178^\circ + \eta\mu^2 2^\circ = 1$$

2

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: α. 120° β. 135° γ. 150°

3

Να αποδείξετε ότι: α. $\eta\mu 105^\circ + \sigma\upsilon\nu 87^\circ - \eta\mu 75^\circ + \sigma\upsilon\nu 97^\circ = 0$ β. $\epsilon\phi 122^\circ - \epsilon\phi 58^\circ \cdot \epsilon\phi 135^\circ = 0$

4

Να αποδείξετε ότι: α. $\sigma\upsilon\nu^2 45^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 135^\circ = 1$ β. $\eta\mu^2 20^\circ + \eta\mu^2 70^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 110^\circ + \sigma\upsilon\nu^2 160^\circ = 2$

5

Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(140^\circ + x) = \eta\mu(40^\circ - x)$ και $\sigma\upsilon\nu(158^\circ - x) = -\sigma\upsilon\nu(22^\circ + x)$

6

Να βρείτε τη γωνία x , όταν:

$$\alpha. \eta\mu x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \beta. \eta\mu x = 1 - \eta\mu x \quad \gamma. \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\delta. \sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2} \quad \epsilon. \epsilon\phi x = -\sqrt{3} \quad \sigma\tau. 2\epsilon\phi x = 1 + \epsilon\phi x$$

7

Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ω και ϕ έχουν το ίδιο ημίτονο. Ισχύει το ίδιο και για τα συνημίτονα των γωνιών αυτών;

