2.3 Σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας

Ερώτηση 1

Ποιες σχέσεις (ταυτότητες) γνωρίζετε μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας;

Απάντηση

Για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύουν οι ταυτότητες:

1. $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ και

2. $εφω = \frac{ημω}{συνω}$

με $συνω \neq 0$, δηλ. αν $ω \neq 90^o$ και 270^o

Οι προηγούμενες ισότητες λέγονται **βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες**, *γιατί με τη βοήθεια τους αποδεικνύουμε άλλες ταυτότητες που περιέχουν τριγωνομετρικούς αριθμούς.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1 Να αποδείξετε ότι $ημx : εφx = συνx$.

Λύση

Επειδή $εφx = \frac{ημx}{συνx}$ έχουμε:

$ημx : εφx = ημx : \frac{ημx}{συνx} = ημx \cdot \frac{συνx}{ημx} = συνx$

2 Να υπολογίσετε την γωνία x όταν $0^o \leq x < 90^o$ και $ημx - 3συνx = 0$.

Λύση

$ημx - 3συνx = 0$ ή $ημx = 3συνx$ ή $\frac{ημx}{συνx} = 3$.

Όμως $\frac{ημx}{συνx} = εφx$. Οπότε $εφx = 3$.

Από τους τριγωνομετρικούς πίνακες βρίσκουμε ότι η τιμή $εφx = 3$ αντιστοιχεί περίπου στη γωνία των 72ο. Άρα $x = 72^o$.

3 Να αποδείξετε ότι $5ημ^2ω + 5συν^2ω = 5$.

Λύση

Ξεκινάμε από το πρώτο μέλος: $5ημ^2ω + 5συν^2ω =$

Βγάζουμε κοινό παράγοντα το 5: $5\left(ημ^2ω + συν^2ω\right) = 5 \cdot 1 = 5$

4 Αν $α = 3ημx$ και $β = 3συνx$ να αποδείξετε ότι: $(α+β)^2 = 9 \cdot (2ημx \cdot συνx + 1)$

Λύση

Αντικαθιστούμε τα α και β και έχουμε:

$(α+β)^2 = (3ημx + 3συνx)^2 =$

$(3ημx)^2 + 2 \cdot 3ημx \cdot 3συνx + (3συνx)^2 =$

$= 9ημ^2x + 18συνxημx + 9συν^2x =$

$= 9\left(συν^2x + ημ^2x\right) + 18ημxσυνx =$

$= 9 + 18συνx \cdot ημx = 9(1 + 2συνx \cdot ημx) = 9 \cdot (2ημx \cdot συνx + 1)$

5 Αν $ημω = 0,5$ και $90^\circ \le ω \le 180^\circ$ να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.

Λύση

Από τη βασική ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ έχουμε:

$(0,5)^2 + συν^2ω = 1$ ή $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + συν^2ω = 1$ ή

$\frac{1}{4} + συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = 1 - \frac{1}{4}$ ή $συν^2ω = \frac{3}{4}$.

Άρα $συνω = +\sqrt{\frac{3}{4}}$ ή $συνω = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Επειδή στο διάστημα 90° έως 180° το συνημίτονο μιας γωνίας έχει αρνητικό πρόσημο είναι: $συνω = -\sqrt{\frac{3}{4}} \simeq -0,87$.

Επίσης $εφω = \frac{ημω}{συνω} = \frac{0,5}{-0,87} = -0,57$.

6 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2x\,εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $εφx + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{1}{συνx}$

Λύση

α) $συν^2xεφ^2x + συν^2x = συν^2x\frac{ημ^2x}{συν^2x} + συν^2x =$

$ημ^2x + συν^2x = 1$

β) $εφx + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{ημx}{συνx} + \frac{συνx}{1+ημx} = \frac{ημx(1+ημx) + συν^2x}{συνx(1+ημx)} =$

$\frac{ημx + 1}{συνx(1+ημx)} = \frac{1}{συνx}$

7 Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$ημ50^\circ ημ130^\circ - συν50^\circ συν130^\circ$$

Λύση

$ημ50^\circ ημ130^\circ - συν50^\circ συν130^\circ = ημ(180^\circ - 130^\circ)ημ130^\circ -$

$συν(180^\circ - 130^\circ)συν130^\circ = ημ^2 130^\circ - (-συν^2 130^\circ) =$

$= ημ^2 130^\circ + συν^2 130^\circ = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:

$$εφ^2 40^\circ συν^2 40^\circ + συν^2 140^\circ = 1$$

Λύση

$εφ^2 40^\circ συν^2 40^\circ + συν^2 140^\circ = ημ^2 40^\circ + συν^2 140^\circ =$

$ημ^2 40^\circ + συν^2 (180^\circ - 40^\circ) = ημ^2 40^\circ + συν^2 40^\circ = 1$

9 Να αποδείξετε ότι:

α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$

β) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$

Λύση

α) $συν^2α - ημ^2α = 1 - ημ^2α - ημ^2α = 1 - 2ημ^2α$

β) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 =$

$ημ^2ω + συν^2ω + 2ημωσυνω + ημ^2ω + συν^2ω - 2ημωσυνω =$

$2(ημ^2ω + συν^2ω) = 2 \cdot 1 = 2$

10 Αν είναι $x = 5συνω$ και $y = 5ημω$, τότε να αποδείξετε ότι:
α) $xσυνω + yσυνω = 5$ β) $x^2 + y^2 = 25$

Λύση

α) $xσυνω + yημω = 3συν^2ω + 3ημ^2ω = 3\underbrace{(συν^2ω + ημ^2ω)}_{1} = 3$

β) $x^2 + y^2 = (3συνω)^2 + (3ημω)^2 = 9(ημ^2ω + συν^2ω) = 9$

11 Αν για μια γωνία ω είναι $εφω = 4$ και $90^0 < ω < 270^0$, τότε να υπολογιστούν οι άλλοι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

Λύση

Έχουμε $εφω = 4$ δηλαδή $\frac{ημω}{συνω} = 4$, οπότε $ημω = 4συνω$ (1).
Αν στην ταυτότητα $ημ^2ω + συν^2ω = 1$ αντικαταστήσουμε το ημω με το 4συνω έχουμε $(4συνω)^2 + συν^2ω = 1$ ή $16συν^2ω + συν^2ω = 1$ ή $συν^2ω = \frac{1}{17}$ άρα $συνω = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ ή $συνω = \pm\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Επειδή $90^0 < ω < 270^0$ είναι $συνω < 0$, οπότε $συνω = -\frac{\sqrt{17}}{17}$.

Από την ισότητα (1) τότε έχουμε: $ημω = 4\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$ ή $ημω = -\frac{4\sqrt{17}}{17}$

12 Να αποδειχθούν οι ταυτότητες:
α) $(ημx + συνx)^2 - 2ημxσυνx = 1$
β) $1 + εφ^2ω = \frac{1}{συν^2ω}$

Λύση

α) Έχουμε $(ημx + συνx)^2 - 2ημxσυνx =$
$ημ^2x + 2ημxσυνx + συν^2x - 2ημxσυνx = ημ^2x + συν^2x = 1$

β) Έχουμε $ημ^2ω + συν^2ω = 1$
Διαιρούμε και τα δύο μέλη με $συν^2ω$:
$\frac{ημ^2ω}{συν^2ω} + \frac{συν^2ω}{συν^2ω} = \frac{1}{συν^2ω}$ ή $εφ^2ω + 1 = \frac{1}{συν^2ω}$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1 *Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.*

α. Αν $ημ^2ω = \frac{3}{4}$, τότε $συν^2ω = \frac{1}{4}$ ☐

β. Αν $συνω = 0$, τότε ορίζεται η εφω. ☐

γ. Για κάθε γωνία ω ισχύει $ημ^2ω = συν^2ω - 1$. ☐

δ. Αν $ημω = \frac{5}{13}$ και $εφω = \frac{5}{12}$, τότε $συνω = \frac{12}{13}$. ☐

2 *Υπάρχει γωνία ω, τέτοια ώστε $ημω = 1$ και $συνω = 1$;*

3 *Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:*

α. Αν $συνω = 0$, τότε $ημω =$ ....

β. Αν $συνω = 1$, τότε $ημω =$ ....

4 *Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση. Αν $ημω = \frac{5}{13}$, τότε το συνω είναι ίσο με:*

α. $\frac{2}{3}$ β. $\frac{12}{13}$ γ. $\frac{2}{3}$ ή $-\frac{2}{3}$ δ. $\frac{12}{13}$ ή $-\frac{12}{13}$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1 Να δείξετε ότι:

α. $ημ^2x \cdot ημ^{-1}x = ημx$ β. $εφ^{-1}x \cdot ημx = συνx$ γ. $ημ^2x \cdot συν^2x \cdot εφ^2x \cdot ημ^{-3}x = ημx$

2 Να υπολογίσετε την γωνία x όταν:

α. $2ημx = 3συνx$ β. $4συνx - 8ημx = 0$

γ. $10ημx - 4συνx = 0$ δ. $2ημx - συνx = 3ημx - 5συνx$

3 Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$Α = ημ^2x \cdot συν^2x \cdot εφ^2x$ $Β = (ημx + συνx)^2 - 2συν^2x \cdot εφx$

$Γ = \frac{ημ^2x \cdot εφ^{-2}x}{συν^2x}$ $Δ = συνx \cdot ημ^2x \cdot εφx \cdot ημ^{-3}x \cdot συνx$

4 Να αποδείξετε ότι:

α. $(x-\sigma\upsilon\nu\omega)^2+(x-\eta\mu\omega)^2=2-\frac{\sqrt{2}}{2}(\sigma\upsilon\nu\omega+\eta\mu\omega)$, αν $2x^2=1$

β. $\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu^2x+\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu^2x=\sigma\upsilon\nu\alpha$

γ. $18\sigma\upsilon\nu^2\alpha+18\eta\mu^2\alpha=18$

5 Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A=\frac{\eta\mu^2\omega\cdot\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2\omega\cdot\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \qquad B=\frac{\eta\mu^4x-\sigma\upsilon\nu^4x}{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}$$

6 Αν $x=4\sigma\upsilon\nu\omega$ και $y=4\eta\mu\omega$ να δείξετε ότι: $x^2+y^2+16x^{-1}\cdot y=16(1+\varepsilon\varphi\omega)$

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

Θέμα 1ο

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

i. $\eta\mu 20°=\eta\mu 160°$ ii. $\eta\mu 130°=-\eta\mu 50°$ iii. $\sigma\upsilon\nu 102°=\sigma\upsilon\nu 78°$ iv. $\varepsilon\varphi 75°=-\varepsilon\varphi 105°$

(4 Μονάδες)

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 120°, 150° και 135°.

(4 Μονάδες)

Θέμα 2ο

Να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της οξείας γωνίας ω, αν $\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{4}{5}$.

(6 Μονάδες)

Θέμα 3ο

Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}=\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu\alpha}$

(6 Μονάδες)